Серия
Суперкомпьютерное
Образование

Координационный совет
Системы научно-образовательных центров суперкомпьютерных технологий

Председатель Координационного совета
В. А. Садовничий,
ректор МГУ имени М. В. Ломоносова,
академик

Заместитель председателя совета
Е. И. Моисеев,
декан факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
академик
А. В. Тихонравов,
директор Научно-исследовательского вычислительного центра
МГУ имени М. В. Ломоносова,
профессор

Члены совета

В. Н. Васильев, ректор Санкт-Петербургского национального исследовательского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, чл. -корр. РАН, профессор; **М. А. Боровская**, ректор Южного федерального университета, профессор; **Н. Н. Кудрявцев**, ректор Московского физико-технического института, чл. -корр. РАН, профессор; **Г. В. Майер**, президент национального исследовательского Томского государственного университета, профессор; **А. А. Фаткулин**, проректор по науке и инновациям Дальневосточного федерального университета, профессор; **Е. В. Чупрунов**, ректор национального исследовательского Нижегородского государственного университета, профессор; **А. Л. Шестаков**, ректор национального исследовательского Южно-Уральского государственного университета, профессор; **В. Н. Чубариков**, декан механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор; **М. И. Панасюк**, директор Научно-исследовательского института ядерной физики МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор; **Вл. В. Воеводин**, заместитель директора Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М. В. Ломоносова, исполнительный директор НОЦ «СКТ-Центр», член-корреспондент РАН.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

А. В. Гончарский С. Ю. Романов С. Ю. Серёжников

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Рекомендовано Учёным советом Научно-исследовательского вычислительного центра (НИВЦ) Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова для использования в учебном процессе

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Санкт-Петербург
2016

УДК 007 (075); 519.6; 517.958:5
ББК 32.973.2
Г 65

Гончарский А. В. **Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов** / А. В. Гончарский, С. Ю. Романов, С. Ю. Серёжников. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 230 с.

В книге рассматриваются обратные задачи вычислительной диагностики и методы их решения с использованием суперкомпьютеров. Одной из важнейших задач современной медицины является разработка принципиально новых методов диагностики. К таким задачам относится проектирование ультразвуковых томографов, которые могут применяться для регулярных обследований. Одна из проблем в разработке алгоритмов решения обратных задач волновой томографии связана с необходимостью использования нелинейных трёхмерных моделей, учитывающих такие эффекты, как дифракция волн, рефракция и т. п. Обратная задача в таких моделях рассматривается как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения. В такой постановке обратные задачи можно решать только на современных суперкомпьютерах.

Разработаны эффективные алгоритмы решения задач волновой томографии на GPU-кластерах. Применительно к задаче медицинской диагностики в книге исследована архитектура GPU-кластеров и определены оптимальные параметры ультразвуковых томографических комплексов. Модельные расчёты выполнены на суперкомпьютере МГУ «Ломоносов».

Книга содержит задачи математического практикума, которые необходимо решать с использованием технологий параллельного программирования MPI/OpenMP, CUDA/OpenCL и др. Самостоятельно решая эти задачи на компьютерах с графическими картами или суперкомпьютерах, можно получить ценный опыт математического моделирования и применения суперкомпьютерных технологий в современной вычислительной диагностике.

Данная книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников, чья деятельность связана с математическим моделированием, разработкой методов решения обратных задач вычислительной диагностики, параллельными вычислениями.

© Гончарский А. В., Романов С. Ю., Серёжников С. Ю., 2016
© Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 2016
© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2016

ISBN 978-5-7422-5213-9

Уважаемый читатель!

Вы держите в руках одну из книг серии «Суперкомпьютерное образование», выпущенную в рамках реализации проекта комиссии Президента РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России «Создание системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий и специализированного программного обеспечения». Инициатором издания выступил Суперкомпьютерный консорциум университетов России.

Серия включает более 20 учебников и учебных пособий, подготовленных ведущими отечественными специалистами в области суперкомпьютерных технологий. В книгах представлен ценный опыт преподавания суперкомпьютерных технологий в таких авторитетных вузах России, как МГУ, ННГУ, ТГУ, ЮУрГУ, СПбГУ ИТМО и многих других. При подготовке изданий были учтены рекомендации, сформулированные в Своде знаний и умений в области суперкомпьютерных технологий, подготовленном группой экспертов Суперкомпьютерного консорциума, а также международный опыт.

Современный уровень развития вычислительной техники и методов математического моделирования даёт уникальную возможность для перевода промышленного производства и научных исследований на качественно новый этап. Эффективность такого перехода напрямую зависит от наличия достаточного числа высококвалифицированных специалистов. Данная серия книг предназначена для широкого круга студентов, аспирантов и специалистов, желающих изучить и практически использовать параллельные компьютерные системы для решения трудоемких вычислительных задач.

Издание серии «Суперкомпьютерное образование» наглядно демонстрирует тот вклад, который внесли участники Суперкомпьютерного консорциума университетов России в создание национальной системы подготовки высококвалифицированных кадров в области суперкомпьютерных технологий, а также их чёткое понимание ответственности за подготовку высококвалифицированных специалистов и формирование

прочного научного фундамента, столь необходимого для эффективного использования суперкомпьютерных технологий на практике.

Ректор Московского университета,
Президент Суперкомпьютерного консорциума университетов России,
академик РАН *В. А. Садовничий*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 13

Введение 15

***Глава 1.* Обратные задачи рентгеновской томографии** 19

1.1. Задачи рентгеновской томографии с полными данными 19
1.2. Задачи рентгеновской томографии с неполными данными 21
1.3. Современные методы решения обратных задач 25
1.4. Примеры решения задач рентгеновской томографии 30
1.5. Задачи математического практикума к главе 1 33

***Глава 2.* Интегральный подход к решению коэффициентных обратных задач в скалярной волновой модели** 41

2.1. Введение 41
2.2. Интегральная постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии 43
2.3. Методы и алгоритмы решения нелинейной обратной задачи волновой томографии в интегральной постановке 46
2.3.1. Итерационные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии в интегральной постановке 46
2.3.2. Модельные расчёты обратных задач волновой томографии в интегральной постановке 48
2.4. Линеаризованные модели в задачах волновой диагностики 51
2.4.1 Задача синтезирования апертуры для широкополосного импульса 51
2.4.2. Метод прямого обращения в линеаризованных задачах волновой диагностики 53
2.4.3. Модельные расчёты в задаче синтезирования апертуры в 3D для широкополосного импульса 56

2.5. РЛС с синтезированной апертурой для реконструкции изображения поверхности Земли 59
2.5.1. Принципы синтезирования апертур для узкополосных импульсов зондирования. 59
2.5.2. Результаты реконструкции реальных данных РЛС с синтезированной апертурой..... 66
2.6. Выводы 67
2.7. Задачи математического практикума к главе 2 68

***Глава 3.* Обратные задачи 2D волновой томографии как коэффициентные задачи для уравнения в частных производных гиперболического типа в моделях без поглощения**..... 72
3.1. Введение..... 72
3.2. Постановка обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных гиперболического типа..... 73
3.3. Вывод выражения для градиента функционала невязки..... 75
3.4. Итерационные методы решения обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных гиперболического типа. 78
3.5. Примеры модельных расчётов задач волновой томографии в послойной схеме 82
3.6. Применение суперкомпьютеров общего назначения для решения обратных задач волновой томографии в послойных моделях 90
3.6.1. Особенности организации параллельных вычислений в 2.5D схеме волновой томографии 90
3.6.2. Оптимизация процедуры параллельных вычислений на слое 94
3.6.3. Исследование масштабируемости алгоритмов 2D волновой томографии 96
3.6.4. Оптимизация программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии 99
3.7. Выводы 104
3.8. Задачи математического практикума к главе 3. 105

***Глава 4.* Обратные задачи 2D волновой томографии как коэффициентные задачи для уравнения в частных производных в моделях с поглощением** . 109

4.1. Введение 109

4.2. Скалярные волновые модели распространения излучения в неоднородных средах 111

4.3. Постановка обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных в моделях с поглощением. Вывод выражений для градиента 115

4.4. Численные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных в моделях с поглощением 123

4.5. Модельные расчёты обратных задач волновой томографии с учётом поглощения на суперЭВМ на процессорах общего назначения 127

4.6. Выводы 137

4.7. Задачи математического практикума к главе 4 138

***Глава 5.* Суперкомпьютерные технологии решения 3D обратных задач волновой томографии** 141

5.1. Введение 141

5.2. О применимости послойных моделей в решении 3D задач ультразвуковой томографии 142

5.2.1. Методы аналитического решения трёхмерной задачи рассеяния ультразвукового излучения на неоднородности в виде шара 142

5.2.2. Модельная задача реконструкции 3D шара в послойной (2.5D) томографической схеме 146

5.3. Постановка обратных задач 3D волновой томографии в модели без поглощения 151

5.4. Численные алгоритмы решения 3D задач ультразвуковой томографии в моделях без поглощения 154

5.5. Модельные расчёты обратных задач 3D ультразвуковой томографии в моделях без поглощения 157

5.5.1. Модельные расчёты задачи 3D волновой томографии с полными данными 157

5.5.2. Модельные расчёты задачи 3D волновой томографии с неполными данными 163

5.6. Обратные задачи 3D ультразвуковой томографии в модели с поглощением 166

***Глава 6.* Суперкомпьютеры на графических процессорах в составе ультразвуковых томографических комплексов в медицине** 173

6.1. Введение 173

6.2. Выбор оптимальной схемы томографических исследований 175

6.2.1. Исследование послойных томографических схем с полными данными 175

6.2.2. Исследование послойных томографических схем на прохождение 178

6.2.3. Исследование послойных томографических схем на отражение 180

6.2.4. Модельные расчёты трёхмерных задач ультразвуковой томографии 183

6.3. Оптимизация параметров медицинских ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы 187

6.3.1. Разрешение ультразвукового томографа, длина волны 187

6.3.2. Количество и расположение источников и приёмников 190

6.3.3. Точность регистрации входных данных 195

6.4. Возможности суперкомпьютеров общего назначения и GPU-кластеров для решения обратных задач ультразвуковой томографии 203

6.4.1. Архитектура и особенности программирования графических процессоров 203

6.4.2. Распараллеливание явной разностной схемы и её масштабируемость 207

6.4.3. Организация вычислений обратной задачи ультразвуковой томографии на GPU кластерах 211

6.5. Определение оптимальных параметров вычислительных комплексов в составе ультразвуковых томографов 215

6.6. Задачи математического практикума к главе 6 219

Заключение 220

Литература..... 222

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Гончарский А. В., Романов С. Ю., Серёжников С. Ю.
НИВЦ МГУ

Предисловие

Книга посвящена решению обратных задач вычислительной диагностики. Большая часть задач интерпретации данных физических экспериментов относится к обратным задачам. Попытки решения обратных задач предпринимались ещё в начале прошлого века, задолго до появления ЭВМ. Одним из таких примеров является интерпретация данных кривых блеска затменных систем в астрофизике. Большая часть звёзд на небе не являются одиночными. Если звёздная система состоит из пары звёзд и при их вращении вокруг центра масс для наблюдателя с Земли одна звезда затмевает другую, то кривая блеска такой затменной системы несёт в себе уникальную информацию о таких геометрических параметрах звёзд, как их радиусы, угол наклона орбиты и т. д. Именно интерпретация данных затменных систем позволила получить уникальную информацию о строении звёзд разных спектральных классов. Используя параметрическое представление для яркости звёзд, астрономы разработали эффективные методы решения таких обратных задач, которые сводились к минимизации функции нескольких переменных. Такие методы можно было реализовать и без использования вычислительных машин.

Прорыв в развитии методов решения задач вычислительной диагностики произошёл после появления ЭВМ и разработки современной теории решения некорректно поставленных задач во второй половине прошлого столетия. Ограниченные вычислительные ресурсы в то время позволяли решать в основном одномерные и двумерные задачи вычислительной диагностики в рамках линейных моделей. Большая часть двумерных задач сводилась к решению уравнений типа свёртки, которые решались с помощью преобразования Фурье. Именно к решению такого типа задач сводится задача обработки данных в рентгеновской томографии.

Появление в конце прошлого века доступных для пользователя суперкомпьютеров существенно расширило возможности решения обратных задач вычислительной диагностики. Суперкомпьютеры приоткрыли

дверь в мир трёхмерных и нелинейных обратных задач вычислительной диагностики. Одна из таких задач, которая обсуждается в книге, представляется очень важной для медицинской диагностики. В современной медицинской практике широко используются рентгеновские томографы. Эти сложнейшие диагностические комплексы имеют очень высокое разрешение и очень широкий спектр применения, однако рентгеновские томографы нельзя использовать для регулярных обследований из-за высокой радиационной нагрузки. В связи с этим разработка ультразвуковых томографов, которые абсолютно безвредны для человека, представляется очень перспективной для медицинских исследований.

Обратные задачи ультразвуковой томографии рассматриваются как коэффициентные обратные задачи для волнового уравнения в частных производных. Математическая модель, в рамках которой разработаны алгоритмы, учитывает как волновые эффекты – дифракцию, рефракцию, переотражение, так и поглощение. С точки зрения математики рассматриваемые задачи являются трёхмерными и нелинейными. Количество неизвестных при их решении составляет как минимум 10^7. Такие задачи невозможно решать без использования суперЭВМ. СуперЭВМ общего назначения не могут использоваться в составе томографических комплексов из-за своих физических характеристик, таких как энергопотребление, габариты и т. д. Однако, как показано в книге, алгоритмы решения обратных задач ультразвуковой томографии эффективно реализуются на GPU-кластерах. В книге рассматриваются вопросы оптимизации архитектуры GPU-кластеров для решения задач волновой томографии. Именно это направление, связанное с использованием GPU-кластеров, по мнению авторов книги представляется наиболее перспективным при разработке современных комплексов вычислительной диагностики.

Алгоритмы решения обратных задач ультразвуковой томографии в настоящее время реализуются на пределе возможностей самых мощных GPU-кластеров. Однако темпы развития суперкомпьютерных технологий настолько впечатляющи, что мы надеемся, что те же задачи через несколько лет смогут быть реализованы с помощью компактных и широко доступных вычислительных систем.

В книге используются такие технологии параллельного программирования, как MPI, OpenCL и т. п. Результаты получены на суперкомпьютерах МГУ.

Введение

Люди старшего поколения помнят устройства для флюорографии. Стандартное устройство содержало один источник рентгеновского излучения. В качестве приёмника использовалась чувствительная в рентгеновском диапазоне плёнка. Рентгеновский снимок производился при фиксированном положении источника и приёмника. Плёнка как приёмник рентгеновского излучения обладает высокой чувствительностью и очень высоким разрешением. Несмотря на это, разрешающая способность флюорографических методов исследования была очень низкой. На плёнке в каждой точке фиксировалось интегральное поглощение вдоль луча, который соединял источник и точку на плёнке. Как результат, пациент получал большую дозу радиации, а врач – очень мало достоверной информации.

В отличие от флюорографии, томографы позволяют регистрировать информацию при разных положениях источника и приёмника. Используя весь объём экспериментальных данных, в томографических исследованиях решается обратная задача восстановления внутренней структуры исследуемого объекта. Именно этот принцип заложен в любом томографическом комплексе. Существуют различные томографические комплексы, отличающиеся, прежде всего, типами источников излучения: рентгеновские, ЯМР, электрон-позитронные и т. д. Первые рентгеновские томографы были созданы в 80-х годах прошлого столетия.

Рентгеновские лучи были открыты в 90-х годах позапрошлого столетия [1]. За это революционное открытие в 1901 году Вильгельм Конрад Рентген получил Нобелевскую премию. Приблизительно в то же время математиком Радоном была решена обратная задача рентгеновской томографии. Таким образом, в начале прошлого столетия учёные имели теоретическую возможность проведения томографических исследований. Тем не менее человечеству понадобилось более полувека для создания первых томографических устройств. Существует несколько причин, которые задержали создание томографических методов исследования.

Первая из них связана с тем, что возникающие в томографии математические задачи являются обратными. Теория и методы решения обратных задач начали интенсивно развиваться только в середине прошлого столетия. Современные методы решения обратных или некорректно поставленных задач являются одним из самых блестящих результатов в математике прошлого столетия. Любой студент первого курса знает, как вычислить приближённое значение непрерывной функции. В некорректно поставленных задачах решается задача вычисления значения разрывной функции, когда её аргумент задан приближённо. Современная теория некорректно поставленных задач даёт исчерпывающий ответ на то, как приближённо вычислить значения разрывных функций, для каких функций такое приближение можно построить, какие из приближённых решений являются оптимальными [2–13]. Большинство рассматриваемых в книге задач относятся к некорректно поставленным.

Вторая причина заключается в том, что для создания современных томографических комплексов необходимы высокие технологии в области разработки источников и приёмников излучения, прецизионных устройств позиционирования и т. д. [14]. Всё это позволяет обеспечить высокую точность входной информации, которая составляет в современных томографах доли процента, и, как следствие, высокое разрешение томографических комплексов.

Третья причина заключается в том, что в любом томографическом устройстве необходимо решать обратную задачу реконструкции внутренней структуры объекта по измеренным входным данным. Объём входных данных, например, в современном рентгеновском томографе составляет порядка 10^9 байт. Для решения обратной задачи даже в простейшем случае использования линейных моделей, как это имеет место в рентгеновской и ЯМР томографии, необходимы компьютеры. Если для рентгеновской и ЯМР томографии достаточно использовать современные персональные компьютеры, то для проектируемых УЗ томографов необходимо использование суперкомпьютеров.

Медицинские томографы имеют разрешение порядка 1–2 мм. Современной тенденцией в медицине является отказ от использования ионизирующего излучения. По этой причине рентгеновские томографы из-за высокой лучевой нагрузки неприменимы для регулярных исследований. Альтернативой для рентгеновских томографических исследований

могут служить УЗ томографы. Ультразвуковое излучение безвредно для человеческого организма. Интенсивные работы по разработке ультразвуковых томографических комплексов для медицинских исследований ведутся в США [15–21], Германии [22–28], России [29–40]. Именно этой задаче – проектированию ультразвуковых томографов – посвящена большая часть книги.

Какую роль играют суперкомпьютерные технологии в проектировании современных томографов? Современный томографический комплекс – это очень сложное и дорогое устройство. На этапе проектирования суперкомпьютеры позволяют определить оптимальные параметры комплекса. Это экономит не только деньги, но и время. В проектируемых ультразвуковых томографах суперкомпьютеры являются тем вычислительным средством, которое способно обеспечить решение обратной задачи реконструкции внутренней структуры исследуемого объекта по регистрируемым данным за приемлемое время. Решать такие задачи на персональном компьютере не представляется возможным, поскольку, в отличие от рентгеновской томографии, обратные задачи ультразвуковой томографии являются нелинейными и трёхмерными. Суперкомпьютеры на графических процессорах по своим параметрам вполне могут входить в состав современных томографических комплексов.

Основной целью разработки томографических комплексов является повышение разрешающей способности диагностики внутренней структуры объектов. Разрабатываемые подходы могут быть использованы не только в медицине, но и в промышленной диагностике. Одной из таких идей, близких к томографическим методам исследований, является принцип синтезирования апертуры. Идея синтезирования апертуры прозрачна и кажется очень простой. Представьте себе, что вы имеете антенну радиолокационной станции на борту космического аппарата. Теоретически, если посылать импульсы и регистрировать отражённые импульсы на траектории, в 1000 раз превышающей размер антенны, можно синтезировать виртуальную антенну, имеющую разрешение, намного превосходящее разрешение антенны РЛС. На этом пути можно повысить разрешающую способность РЛС почти в 1000 раз [41].

В книге использованы классические математические модели, постановки прямых и обратных задач и методы их решения. Они просты и понятны, потому что являются результатом труда сотен выдающихся учёных, таких как Френель, Максвелл, Гельмгольц, Фурье, Рентген,

Кюри, Банах, Гильберт, Тихонов и многие другие. Мы включили в книгу задачи для математического практикума. Самостоятельно решая эти задачи на компьютерах с графическими картами или суперкомпьютерах, вы можете получить ценный опыт математического моделирования и применения суперкомпьютерных технологий в современной вычислительной диагностике. Для решения задач математического практикума можно использовать технологии программирования MPI/OpenMP, CUDA/OpenCL и другие [42].

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность академику, директору института им. Вишневского В. А. Кубышкину, заведующему кафедры акустики физического факультета МГУ, академику А. В. Руденко, член-корреспонденту РАН Вл. В. Воеводину, директору по продуктам и технологиям компании «Т-Платформы» И. В. Глухову за постоянное внимание и поддержку работы. А также, выразить благодарность Вад. В. Воеводину за помощь в подготовке раздела 3.6 и Г. М. Агаян за помощь в подготовке раздела 5.2.

Глава 1

Обратные задачи рентгеновской томографии

1.1. Задачи рентгеновской томографии с полными данными

Рентгеновская томография является одной из наиболее используемых диагностических технологий как в медицинских исследованиях, так и в задачах неразрушающего контроля промышленных изделий. Разрешение современных медицинских томографов достигает 1–2 мм, для промышленной диагностики на микроуровне разработаны томографы, разрешение которых достигает порядка 10 мкм.

Математические модели, используемые в рентгеновской томографии – это геометрическая оптика. В исследовании трёхмерных объектов используется послойная схема. Слово «томо» в переводе с греческого означает срез или слой. Трёхмерный объект исследуется по слоям, в каждом из которых восстанавливается коэффициент поглощения $f(x, y)$ как двумерная функция декартовых координат x, y. Возможность решения обратных задач рентгеновской томографии по слоям связана с уникальными свойствами рентгеновского излучения, которое легко можно поглотить, но очень трудно отклонить. Коэффициент рефракции рентгеновского излучения отличается от единицы не более чем на сотые доли процента. Обратные задачи рентгеновской томографии являются линейными.

На рис. 1.1 приведена томографическая схема рентгеновской томографии. При фиксированном положении источника регистрируется интегральное поглощение на прямой, соединяющей источник и приёмник. Введём на плоскости Oxy семейство прямых $L(l, \theta)$. Параметр l меняется от $-\infty$ до $+\infty$, θ – от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Если l и θ могут принимать все значения в указанных диапазонах, говорят о задаче с полными данными.

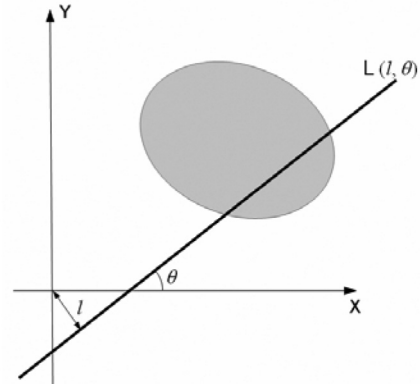


Рис. 1.1. Схема рентгеновской томографии

В реальности исследуемый объект является компактным, и параметр l достаточно менять в ограниченных пределах. В томографическом эксперименте измеряется интегральное поглощение на луче $L(l, \theta)$, то есть функция

$$p(l,\theta) = \int\limits_{L(l,\theta)} f(x,y)dl. \tag{1.1}$$

Если функция $f(x, y)$ задана, то вычисление $p(l, \theta)$ представляет собой прямую задачу. Обратную задачу рентгеновской томографии можно сформулировать как задачу решения операторного уравнения

$$Af = \int\limits_{L(l,\theta)} f(x,y)dl = p(l,\theta). \tag{1.2}$$

Для простоты будем рассматривать случай, когда функции $f(x, y)$ и $p(l, \theta)$ являются интегрируемыми с квадратом. В этом случае оператор A действует из пространства $\mathbf{L}_2$ функций, интегрируемых с квадратом, в пространство $\mathbf{L}_2$. Обратная задача рентгеновской томографии заключается в том, что по заданной функции $p(l, \theta)$ необходимо найти функцию $f(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1.2). Функция $p(l, \theta)$ определяется из эксперимента и задаётся с некоторой ошибкой δ.

Особенностью задач рентгеновской томографии является не только линейность обратной задачи (1.2), но и возможность прямого обращения оператора A, то есть возможность вычисления обратного оператора A^{-1} на области его определения $D_A \subset \mathbf{L}_2$. В гильбертовом пространстве оператор A имеет сопряжённый A^*, который определяется из соотношения $(Af, p) = (f, A^*p)$, справедливого для любых f и p из $\mathbf{L}_2$. Домножим левую и правую часть уравнения (1.2) на A^*. Уравнение (1.2) перепишется в следующем виде:

$$A^*Af = \iint \frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = u(x,y); \tag{1.3}$$

где функция $u(x, y)$ определена соотношением

$$u(x,y) = A^*p = \int\limits_{\theta} p(x\cos(\theta)+y\sin(\theta),\theta)d\theta. \tag{1.4}$$

В уравнении (1.3) функцию $u(x, y)$ можно считать заданной из эксперимента. Уравнение (1.3) является уравнением от разности аргументов. Переходя к преобразованию Фурье, получим

$$\frac{\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}=\tilde{U}(\omega_1,\omega_2). \qquad (1.5)$$

Здесь $\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)$ представляет собой Фурье-образ функции $f(x, y)$, а $\tilde{U}(\omega_1,\omega_2)$ – Фурье-образ функции $u(x, y)$. Уравнение (1.5) перепишем в виде

$$\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}\,\tilde{U}(\omega_1,\omega_2). \qquad (1.6)$$

Формула (1.6), по сути дела, обращает оператор A и даёт возможность выписать в явном виде решение исходного операторного уравнения (1.2) в случае полного задания данных. Заметим, что если решение задачи существует, то, как мы показали, оно представимо в виде (1.6), и, стало быть, является единственным. Для отыскания функции $f(x, y)$ достаточно сделать обратное преобразование Фурье для $\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)$ в представлении (1.6). Решение задачи (1.6) с вычислительной точки зрения не представляет никаких проблем. Алгоритм легко реализуется на обычном персональном компьютере.

В современных медицинских томографах исследуется трёхмерный объект. Схема сбора данных устроена так, что она даёт возможность восстанавливать изображение сразу в большом количестве плоскостей. Типичной сеткой для решения 3D задач рентгеновской томографии является куб 1000 × 1000 × 1000 точек. Таким образом, для одного пациента количество двумерных сечений может составлять до 1000. Поскольку решение каждой из этих задач можно осуществлять независимо, разумно использовать графические процессоры, которые дают выигрыш в скорости при вычислении преобразований Фурье минимум в 100 раз. Мощной рабочей станции, оснащённой несколькими GPU, оказывается вполне достаточно не только для реконструкции сечений, но и для их предварительной обработки, представления 3D информации и т. п.

1.2. Задачи рентгеновской томографии с неполными данными

Как было показано в предыдущем параграфе, задача рентгеновской томографии с полными данными имеет единственное решение, которое можно получить в явном виде. Зачастую, проводя томографические

исследования, мы не имеем возможность получить полный набор данных для всех l и θ. Представьте, например, что вы исследуете компактный объект, замурованный в стене. В этом случае вы не имеете возможности облучать объект со всех сторон. Источники и приёмники могут располагаться только на двух плоскостях, то есть диапазон углов θ будет представлять собой множество углов θ, таких что $|\theta| < \theta_0 < \pi/2$. Можно показать, что одномерное преобразование Фурье от функции $p(l, \theta)$ по аргументу l при фиксированном θ определяет образ Фурье $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$ в частотной плоскости (ω_1, ω_2) на луче, выходящем из точки (0, 0) плоскости (ω_1, ω_2) под углом θ. Это означает, что преобразование Фурье от функции $f(x, y)$ в случае неполно заданного диапазона углов будет известно не на всей плоскости (ω_1, ω_2). Применение формулы (1.6) напрямую тоже невозможно. Обратная задача в этом случае не имеет единственного решения [10].

Единственным выходом из этой ситуации является использование дополнительной априорной информации об исследуемом объекте. Какого типа информацию можно использовать? Известно, что искомая функция $f(x, y)$ является неотрицательной. Такую информацию можно и нужно использовать, однако можно показать, что она не спасает положение. Можно попытаться использовать информацию о том, что функция $f(x, y)$ имеет компактный носитель, то есть равна нулю вне некоторой ограниченной области. С точки зрения математики эта информация даёт теоретический шанс решить обратную задачу однозначно. Использование такой дополнительной информации в задаче рентгеновской томографии позволяет сделать решение обратной задачи на множестве функций с компактным носителем единственным. На самом деле известно, что преобразование Фурье $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$ от функции $f(x, y)$, имеющей компактный носитель, является аналитической функцией своих аргументов ω_1, ω_2 [10]. Используя аналитичность функции $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$, можно построить аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость (ω_1, ω_2). Таким образом, обратная задача будет иметь единственное решение.

К сожалению, этот красивый математический результат не даёт практических результатов. Дело в том, что для построения аналитического продолжения необходима очень высокая точность задания функции $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$, полученной по экспериментальным данным. В противном случае процедура аналитического продолжения не оправдывает ожиданий. Заметим, что сама по себе процедура аналитического продолжения представляет собой некорректно поставленную задачу [10].

Приведём пример такой физической априорной информации, которая позволяет с высокой точностью решать задачи рентгеновской томографии и в случае неполного диапазона углов. Предположим, что объектом исследования является многослойная печатная плата (PCB, printed circuit board). Исследуемый трёхмерный объект в этом случае представляет собой слоистый объект (рис. 1.2). Пусть объект состоит из N слоёв, и поглощение в i-м слое описывается функцией $f_i(x, y)$, $i = 1...N$.

Будем для простоты считать поглощающие слои тонкими, а материал между слоями – однородным. Предположим, что расстояние между поглощающими слоями одинаково. Пусть многослойная плата облучается параллельным пучком рентгеновского излучения, который падает на исследуемый объект под заданным углом, параллельно векторам $\boldsymbol{n}_k$, $k = 1...M$. Результат регистрируется на детекторах, расположенных в плоскости, параллельной плоскости печатной платы. Пусть l – луч, проходящий через точку (x, y) в верхней плоскости печатной платы. Точка пересечения луча с j-м слоем печатной платы в k-м эксперименте имеет координаты $(x + (j-1)\Delta x_k, y + (j-1)\Delta y_k)$. Здесь $(j-1)\Delta x_k$, $(j-1)\Delta y_k$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\Delta}_{jk}$, который коллинеарен проекции вектора $\boldsymbol{n}_k$ на плоскость Oxy.

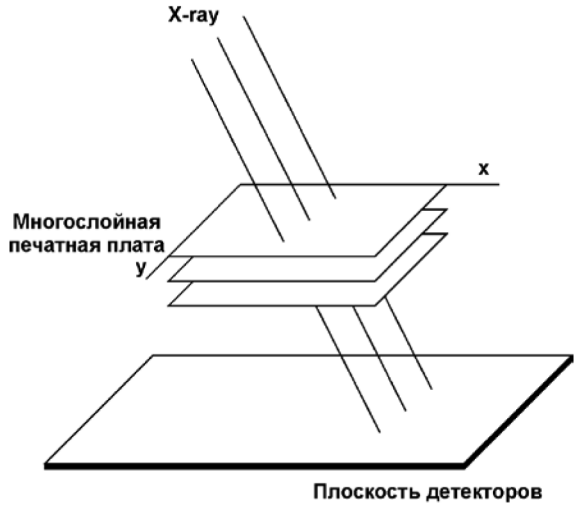


Рис. 1.2. Схема томографического эксперимента исследования многослойной печатной платы

Нетрудно убедиться в том, что в такой томографической схеме обратная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta}_{jk}) = u_k(\boldsymbol{r}), k = 1...\mathrm{M}. \tag{1.7}$$

В эксперименте измеряется суммарное поглощение в каждой точке (x, y). Это поглощение состоит из поглощения в первом слое $f_1(x, y)$, к которому добавляется поглощение во всех остальных слоях в точках, сдвинутых относительно (x, y). В случае неколлинеарных векторов $\boldsymbol{n}_k$ при условии, что $M \geqslant N$, система уравнений (1.7) позволяет однозначно определить функции поглощения $f_i(x, y)$ в каждом из слоёв. На практике обычно используют вариант, когда количество проекций M превосходит число слоёв N. Для решения системы уравнений (1.7) можно использовать разные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, в том числе и итерационные методы.

Перепишем уравнение в виде

$$Af = u. \tag{1.8}$$

Здесь f и u – векторы, A – матрица. Входные данные u получаются из эксперимента. Таким образом, можно считать заданным вектор u_δ, являющийся приближённым значением вектора u. Будем считать, что $\|u_\delta - u\| \leqslant \delta$. Для решения уравнения (1.8) можно использовать метод простой итерации:

$$f_{n+1} = f_n - \mu A^* A f_n - \mu A^* u_\delta. \tag{1.9}$$

Здесь μ – числовой параметр в диапазоне $0 < \mu < 2/\|A^*A\|$. В качестве начального приближения можно выбрать $f_0 = 0$.

Исходное уравнение (1.7) можно решать, используя преобразование Фурье. Пусть функции $f_i(x, y)$, характеризующие поглощение в i-м слое, имеют образы Фурье $\tilde{F}_i(\omega_1, \omega_2)$. Нетрудно убедиться в том, что, взяв преобразование Фурье от правой и левой части в уравнении (1.7), мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно Фурье-образов $\tilde{F}_i(\omega_1, \omega_2)$, которая является плохо обусловленной [5].

Мы обсудили несколько потенциальных методов решения обратных задач рентгеновской томографии. Обратные задачи рентгеновской

томографии имеют особенность, заключающуюся в том, что они относятся к некорректно поставленным задачам. Так или иначе, проблемы, связанные с решением некорректно поставленных задач, могут начать обнаруживаться при любых попытках их решения, вне зависимости от методов. В следующем параграфе мы подробно обсудим особенности алгоритмов решения обратных некорректно поставленных задач.

1.3. Современные методы решения обратных задач

Задачи вычислительной диагностики, рассмотренные в книге, относятся к обратным задачам. Большое количество обратных задач математической физики сводится к решению операторного уравнения вида

$$Af = u, \quad f \in F, u \in U. \tag{1.10}$$

Здесь A – оператор, действующий из пространства F в пространство U. Будем для простоты считать пространства F и U гильбертовыми. Частным случаем уравнения (1.10) является случай, когда пространства F и U являются конечномерными, а оператор A является линейным оператором и представим в виде прямоугольной матрицы, то есть уравнение (1.10) представляет собой систему линейных уравнений. Примеры таких задач рентгеновской томографии приведены в параграфах 1.1 и 1.2.

Обсудим некоторые типичные для обратных задач проблемы: разрешимость, единственность решения и устойчивость решения обратной задачи. Разрешимость обратной задачи с математической точки зрения связана с описанием подмножества элементов пространства U, на которых определён обратный оператор A^{-1}. Важной проблемой для задач диагностики является проблема единственности решения обратной задачи. Этой классической проблеме посвящено большое количество работ, существуют школы математиков, которые занимаются изучением этой проблемы [43, 44]. Как было показано в главе 1, обратная задача рентгеновской диагностики с полным диапазоном данных имеет единственное решение. Если единственности нет, то ситуация в обратных задачах диагностики существенно ухудшается, поскольку нет возможности однозначно восстановить внутреннюю структуру исследуемого объекта. Единственным выходом является использование дополнительной априорной информации. Использование такой информации сужает область возможных решений задачи, что может обеспечить единственность решения.

Устойчивость решения обратной задачи напрямую связана с корректностью либо некорректностью обратной задачи. В корректных задачах обратный оператор A^{-1} задан на всём пространстве U и является непрерывным. В некорректных задачах оператор A^{-1}, как правило, определён только на некотором множестве $D_A \subset U$ и не является непрерывным. В обратных задачах входные данные u задаются с некоторой ошибкой. Будем считать, что f является единственным решением уравнения (1.10) для заданного u, то есть выполняется равенство $Af = u$. Пусть вместо точного значения u в эксперименте известно его приближённое значение u_δ, такое, что $\|u_\delta - u\| \leqslant \delta$. За приближённое решение некорректно поставленной задачи принимается элемент f_δ, построенный по входным данным (u_δ, δ), такой что $f_\delta \to f$ при $\delta \to 0$.

Центральным моментом теории решения некорректно поставленных задач является понятие регуляризирующего алгоритма [3]. Регуляризирующим алгоритмом будем называть правило R, которое ставит в соответствие паре (u_δ, δ) некоторый элемент f_δ, стремящийся к f при $\delta \to 0$. Если регуляризирующий алгоритм задан, то приближённое решение строится по правилу:

$$f_\delta = R(u_\delta, \delta) \to f \text{ при } \delta \to 0. \tag{1.11}$$

Современную теорию некорректно поставленных задач можно отнести к самым фундаментальным математическим результатам прошлого столетия. С математической точки зрения это теория о приближённом вычислении разрывных функций, когда аргумент функции задан с ошибкой. Для каких классов разрывных функций возможно приближённое вычисление значения функции по приближённо заданному аргументу? Например, для функции Дирихле этого сделать нельзя [12]. Однако это можно сделать для широких классов обратных задач, в частности для всех обратных задач, рассмотренных в настоящей книге. В теории регуляризации предложены широкие классы регуляризирующих алгоритмов как способов решения некорректно поставленных задач. Разработаны итерационные регуляризирующие алгоритмы для решения как линейных, так и нелинейных некорректных задач. Исследованы вопросы оптимальности приближённого решения и т. п. [10, 11].

Приведём некоторые примеры построения регуляризирующих алгоритмов для уравнения типа (1.10). Для простоты изложения будем предполагать, что оператор A является линейным и взаимно однозначным.

Рассмотрим уравнение

$$(A^*A + \alpha E)f = A^*u_\delta. \qquad (1.12)$$

Здесь α – некоторый положительный параметр, получивший название параметра регуляризации. Оператор $(A^*A + \alpha E)$ обратим для любого $\alpha > 0$, то есть решение уравнения (1.12) можно выписать в виде

$$f_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1}A^*u_\delta. \qquad (1.13)$$

Можно показать, что семейство операторов $(A^*A + \alpha E)^{-1}A^*$ является аппроксимирующим семейством для оператора A^{-1} на всей области его определения D_A, то есть выполнено соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}(A^*A+\alpha E)^{-1}A^* = A^{-1}.$$

За приближённое решение некорректной задачи (1.10) можно принять элемент

$$f_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1}A^*u_\delta, \qquad (1.14)$$

если параметр регуляризации α определённым образом согласован с погрешностью входной информации δ. Приведём один из примеров согласования (выбора) параметра регуляризации. Рассмотрим функцию $\beta(\alpha) = \|Af_\alpha - u_\delta\|$ [9]. Можно показать, что функция $\beta(\alpha)$ является монотонной функцией аргумента α. При выполнении условия $\|u_\delta\| > \delta$ уравнение

$$\beta(\alpha) = \|Af_\alpha - u_\delta\| = \delta \qquad (1.15)$$

имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\delta)$. В противном случае, если $\|u_\delta\| \leqslant \delta$, за приближённое решение естественно принимать $f = 0$. Показано, что элемент f_α при выборе $\alpha(\delta)$ по критерию (1.15) является приближённым решением некорректно поставленной задачи (1.10). Способ выбора параметра α по критерию (1.15) получил название метода невязки [9].

Методы решения некорректно поставленных задач разработаны и для случая, когда исходное уравнение (1.10) имеет неединственное решение. Можно показать, что в случае линейного оператора A приближённое решение, построенное по схеме Тихонова, обеспечивает сходимость к нормальному решению f_0 в уравнении (1.10). Решение уравнения (1.10) называется нормальным, если это решение имеет наименьшую норму среди всех возможных решений уравнения. В частности, можно показать, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} f_\alpha = f_0$ при точно заданной правой части уравнения (1.10). Таким

образом, для вырожденных систем линейных алгебраических уравнений Тихоновская схема позволяет строить асимптотическое приближение при $\alpha \to 0$ к нормальному решению системы.

Методы регуляризации распространены и на так называемые несовместные задачи, когда для заданного u уравнение (1.10), вообще говоря, неразрешимо. В этом случае вводится понятие псевдорешения уравнения. Псевдорешением задачи (1.10) в этом случае называется элемент z, на котором достигается $\min\limits_{z} \| Az - u \|$. Для системы линейных алгебраических уравнений, даже несовместной, псевдорешение всегда существует. Псевдорешение может быть неединственным. Можно показать, что Тихоновская схема позволяет строить при $\alpha \to 0$ асимптотическое приближение к нормальному псевдорешению задачи (1.10), то есть к псевдорешению, которое имеет минимальную норму [45]. Если правая часть уравнения (1.10) задана с ошибкой, то параметр регуляризации α должен быть согласован с погрешностью задания входной информации.

В обратных задачах мы, как правило, не можем полагать, что выбранная нами математическая модель абсолютно точно соответствует действительности. В связи с этим представляется естественной постановка, когда оператор A в уравнении (1.10) задан с некоторой погрешностью. В этом случае мы считаем, что точный оператор A в уравнении (1.10) нам неизвестен. В простейшем случае линейной задачи можно считать, что известно его приближённое значение – линейный оператор A_h, такой, что $\|A_h - A\| \leqslant h$. Роль погрешности в этом случае играет вектор (δ, h). Теория решения некорректно поставленных задач легко переносится и на этот случай.

Теория регуляризации распространяется и на случай нелинейных операторов [10, 11]. В этом случае также можно применять схему построения приближённых решений (1.12). Схема (1.12) получила в литературе название схемы Тихонова. В определённом смысле эта схема является оптимальной [10].

Существуют и другие методы построения регуляризирующих алгоритмов, которые внешне кардинально отличаются от схемы Тихонова. Широко распространены итерационные методы приближённого решения некорректно поставленных задач [10]. Итерационные методы применимы как для линейных, так и для нелинейных задач. Разработано большое количество итерационных регуляризирующих процедур. Приведём

только один простейший пример построения такой процедуры. Рассмотрим итерационный процесс:

$$f_{n+1} = f_n - \mu A^* A f_n - \mu A^* u_\delta, \; f_0 = 0, \tag{1.16}$$

$$0 \le \mu \le 2 / \left\| A^* A \right\|.$$

Можно показать, что итерационный процесс (1.16) является регуляризирующим алгоритмом и строит приближённое решение некорректно поставленной задачи (1.10), если параметр $n = n(\delta)$ выбрать по следующему критерию: за $n(\delta)$ выбирается первый номер итерации n, для которого выполнено соотношение

$$\beta(n) = \|Af_n - u_\delta\| = b\delta, \tag{1.17}$$

где b – фиксированное число, $b > 1$. Параметр $n(\delta)$ играет роль параметра регуляризации. По сути дела, принцип регуляризации не рекомендует при фиксированной погрешности δ делать слишком большое количество итераций. Более подробную информацию о методах итеративной регуляризации можно найти в монографии [10].

В качестве примера некорректно поставленной задачи в этом параграфе обсуждалось операторное уравнение Фредгольма 1-го рода (1.2). Далеко не все некорректно поставленные задачи можно описать подобным образом. В главах 3, 4, 5 будут обсуждаться так называемые коэффициентные обратные задачи, в которых восстанавливается неизвестный коэффициент в дифференциальном уравнении второго порядка. Рассматриваемые в главах 3–5 коэффициентные обратные задачи являются нелинейными. В главах 2–4 книги предложены эффективные алгоритмы и численные методы решения обратных задач ультразвуковой томографии как коэффициентных обратных задач.

Вернёмся к задаче (1.10). Теория решения некорректно поставленных задач позволяет по приближённо заданной входной информации (u_δ, δ) построить такой элемент f_δ, что $f_\delta \to f$ при $\delta \to 0$. Таким образом, гарантируется асимптотическое приближение f_δ к f при $\delta \to 0$. Хотелось бы оценить погрешность приближения f_δ к f при заданном значении δ. Будем обозначать эту погрешность как $\varepsilon = \|f_\delta - f\|$. Погрешность ε зависит не только от δ, но и от f. Таким образом, $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f)$. Но f является решением обратной задачи и нам неизвестно. В этом случае представляется естественным

в качестве оценки погрешности использовать величину $\sup\limits_{f \in E} \varepsilon(\delta, f)$. Здесь E – некоторое множество элементов f, которое может совпадать и со всем пространством F.

Рассмотрим некоторое множество элементов $f \in E \subset F$. Можно показать, что если $\sup\limits_{f \in E} \varepsilon(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$, то задача (1.10) является условно корректной на множестве элементов $f \in E$, то есть обратный оператор A^{-1}, определённый на множестве $AE \subset U$, является ограниченным [10, 12]. Множество E для некорректных задач является достаточно «узким» и уж никак не может совпадать со всем пространством, поскольку обратный оператор A^{-1}, определённый на множестве D_A, не является ограниченным. Этот результат означает, что теория решения некорректно поставленных задач гарантирует асимптотическое приближение f_δ к f, однако оценка близости f_δ к f при фиксированном δ для некорректных задач на всём пространстве невозможна [10].

1.4. Примеры решения задач рентгеновской томографии

Приведём два примера обработки экспериментальных данных реальных томографических экспериментов в рентгеновском диапазоне. На рис. 1.3 приведена фронтальная проекция ($x = const$) трёхмерного объекта – ракушки. Изображение на рис. 1.3 по сути дела представляет собой флюорографическое изображение ракушки при одной из её ориентаций. При томографическом исследовании трёхмерного объекта в рентгеновской томографии можно получить любое сечение исследуемого объекта. На рис. 1.4 приведены несколько сечений трёхмерного объекта в плоскостях $z = const$, реконструированные в томографическом эксперименте с полным диапазоном данных l, θ. Для решения обратной задачи использовался алгоритм, основанный на преобразовании Фурье (1.6).

Реализация томографических схем с полными данными не представляет в настоящее время серьёзных проблем. Расчёт обратной задачи осуществлялся на обычном персональном компьютере.

Схему томографических исследований с полными данными не всегда удаётся реализовать. Эту схему не удаётся использовать, например, в задаче контроля качества печатных плат (printed circuit board, PCB). Размер плат может достигать 50 × 50 см, в то время как их толщина

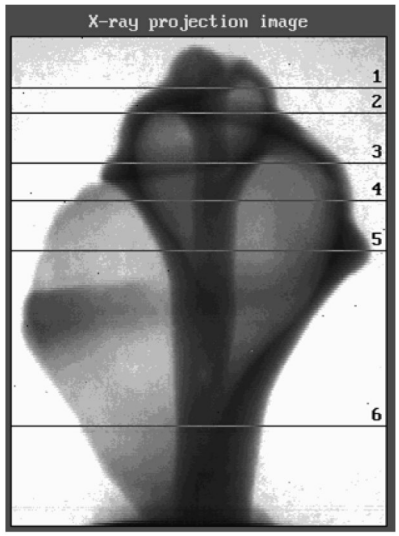


Рис. 1.3. Фронтальная проекция (X = const)

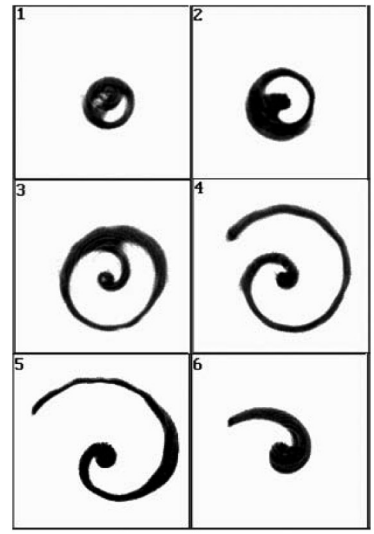


Рис. 1.4. Реконструированные сечения ракушки

не превосходит миллиметры. Необходимое разрешение составляет порядка 20 мкм. При такой геометрии исследуемого объекта и высоком разрешении применение стандартных томографов не представляется возможным. Использование дополнительной информации о слоистой структуре объекта существенно упрощает обратную задачу. В случае печатной платы в обратной задаче восстанавливается несколько функций $f_1(x, y)..f_n(x, y)$, характеризующих поглощение рентгеновского излучения в каждом слое. С математической точки зрения задача сводится к решению уравнения (1.7). Взяв преобразование Фурье от левой и правой частей уравнения (1.7), получим систему линейных алгебраических уравнений для Фурье-образов $\tilde{F}_i(\omega_1, \omega_2)$ от искомых функций $f_i(x, y)$.

Обсудим результаты реального эксперимента по томографическому исследованию пятислойной печатной платы. Для восстановления внутренней структуры РСВ использовались изображения печатной платы под разными углами, как это показано на рис. 1.2. Примеры рентгеновских проекций, полученных в плоскости детектирования, показаны на рис. 1.5. Каждая проекция содержит изображение всех слоёв сразу на просвет.

Систему уравнений (1.7) можно переписать для Фурье-образов искомых функций $f_j(x, y)$, $j = 1...5$. В частотной плоскости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, получим

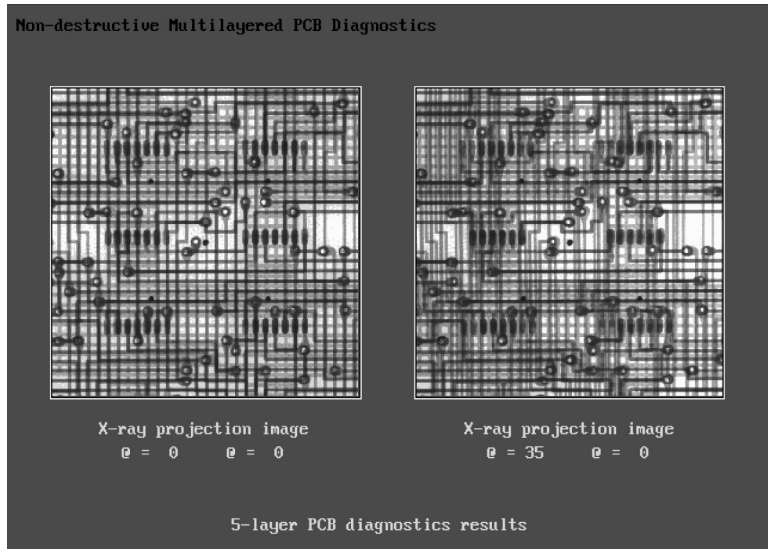


Рис. 1.5. Некоторые из проекций, полученных просвечиванием печатной платы рентгеновским излучением

$$\sum_{j=1}^{5} a_{jk}(\omega_1, \omega_2)\tilde{F}_j(\omega_1, \omega_2) = \tilde{u}_k(\omega_1, \omega_2),\ j = 1...5,\ k = 1...M. \qquad (1.18)$$

Здесь $\tilde{F}_j(\omega_1, \omega_2)$ – Фурье-образы от $f_j(x, y)$. Величины $a_{jk}(\omega_1, \omega_2)$ вычисляются по компонентам векторов смещения $\mathbf{\Delta}_{jk}$: $a_{jk}(\omega_1, \omega_2) = e^{-i(\mathbf{\Delta}jk,\, \boldsymbol{\omega})}$. Здесь $(\mathbf{\Delta}_{jk}, \boldsymbol{\omega})$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{\Delta}_{jk}$ на вектор $\boldsymbol{\omega}$ с компонентами (ω_1, ω_2).

Если углы зондирования заданы, то можно вычислить компоненты векторов смещения $\mathbf{\Delta}_{jk}$.

Система уравнений (1.18) для каждого фиксированного (ω_1, ω_2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{F}_j(\omega_1, \omega_2)$, $j = 1...N$. Напомним, что функции $\tilde{F}_j(\omega_1, \omega_2)$ представляют собой Фурье-образы от искомых функций. Для решения полученной системы уравнений в каждой фиксированной точке (ω_1, ω_2) можно использовать схему Тихонова (1.14). Параметр α можно выбрать, например, по методу невязки.

На рис. 1.6 приведены реконструированные изображения фрагмента пятислойной печатной платы, полученные в реальном томографическом

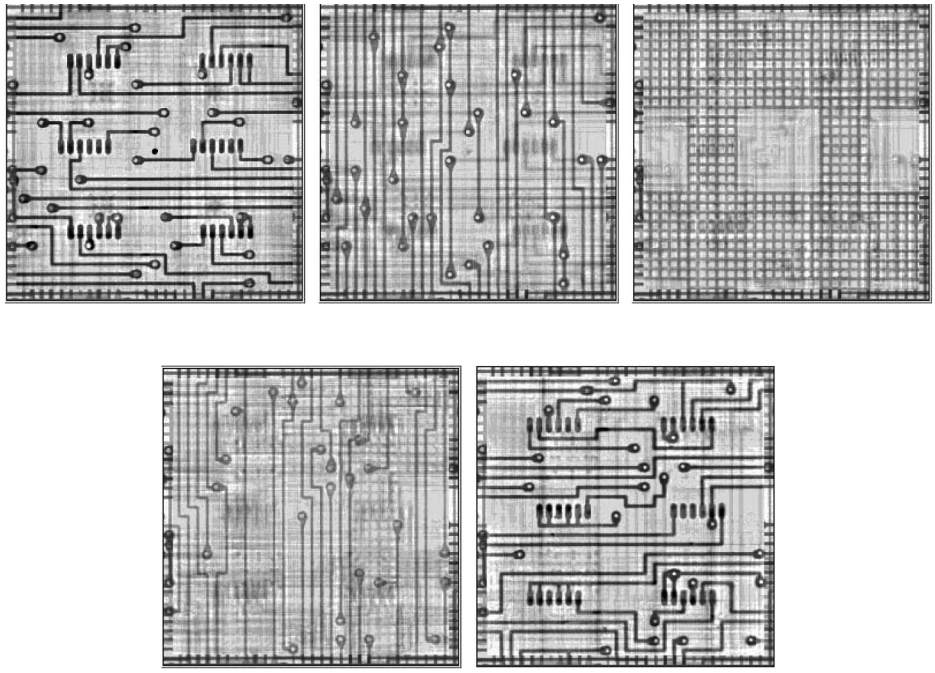


Рис. 1.6. Реконструированные изображения внутренних слоёв фрагмента пятислойной печатной платы

эксперименте по пяти проекциям. Для реконструкции изображений использовалось представление (1.18). Видно, например, что отверстия на втором слое сделаны не по центру площадок. Третий слой представляет собой экранирующую сетку. Качество реконструкции внешних слоёв PCB лучше, чем внутренних.

Размер изображённого фрагмента печатной платы – 5 × 5 см, расстояние между проводниками – порядка 0.4 мм, расстояние между слоями – порядка 0.3 мм.

1.5. Задачи математического практикума к главе 1

Задача № 1. Схема Тихонова для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений

1. Рассмотрите совместную систему линейных алгебраических уравнений

$$Af = u,\ f \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R}^m.$$

Ранг прямоугольной матрицы A равен $r < n$. Покажите, что система линейных алгебраических уравнений $(A^*A + \alpha E)f = A^*u$ имеет единственное решение для любого $\alpha > 0$.

2. Убедитесь в том, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} f_\alpha = f_0$, где f_0 – нормальное решение, то есть решение, которое имеет наименьшую норму среди всех возможных решений системы линейных алгебраических уравнений.

3. Рассмотрите пример системы линейных алгебраических уравнений

$$x + y = 1,$$
$$2x + 2y = 2.$$

Используя Тихоновскую схему, вычислите приближённое значение для нормального решения при значениях параметра регуляризации $\alpha = 10^{-5}$ и $\alpha = 10^{-7}$.

4. Рассмотрите систему линейных алгебраических уравнений

$$x + y + z = 1,$$
$$x + y - z = 1.$$

Используя Тихоновскую схему, найдите нормальное решение, используя значения параметра регуляризации $\alpha = 10^{-5}$ и $\alpha = 10^{-7}$. Дайте геометрическую интерпретацию полученного результата.

5. Рассмотрите несовместную систему линейных алгебраических уравнений

$$x + y = 1,$$
$$x + y = 1.2.$$

Покажите, что Тихоновская схема обеспечивает приближённое решение для нормального псевдорешения несовместной системы уравнений при параметре α, стремящемся к 0. Вычислите приближённое значение для псевдорешения при $\alpha = 10^{-5}$ и $\alpha = 10^{-7}$.

Задача № 2. Реконструкция томографических данных в полном диапазоне углов с точно заданными данными

На рис. 1.7 приведены данные фантома двумерной функции $f(x, y)$ для модельного эксперимента расчёта прямой и обратной задачи рентгеновской томографии с полными данными.

1. Вычислите томограмму $p(l, \theta)$ на сетке $l = -128...127$ с шагом 1; $\theta = -90°...90°$ с шагом 1°. Для этого используйте аналитическое представление

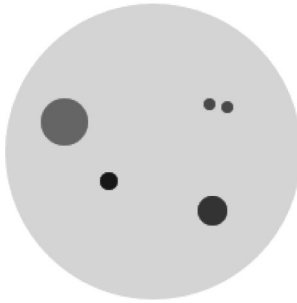


Рис. 1.7. Фантом $f(x, y)$

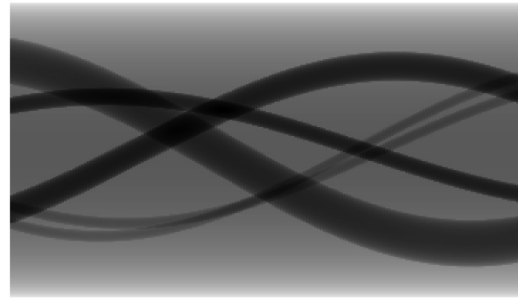


Рис. 1.8. Томограмма $p(l, \theta)$

для фантома как набора кругов с заданными центрами, радиусами и коэффициентами поглощения:

Таблица 1.1.

Аналитическое представление для фантома

Область	Центр (x, y)	Радиус	Коэфф. поглощения
G_0	(0, 0)	100	0.1
G_1	(20, 20)	10	1
G_2	(–30, –10)	16	0.5
G_3	(25, –15)	4	0.75
G_4	(19, –16)	4	0.75
G_5	(–15, 10)	6	1.5

Вне области G_0 функция $f(x, y) = 0$. Внутри области G_0 функция $f(x, y) = 0.1$, кроме областей $G_1 \ldots G_5$, имитирующих неоднородные включения внутри исследуемого объекта, в которых значения функции поглощения заданы в таблице.

Выведите полученное изображение $p(l, \theta)$ на экран. Сравните полученное изображение с рис. 1.8, где горизонтальная ось соответствует θ, вертикальная – l.

2. Используя конечномерную аппроксимацию на сетке с шагом 1 по x, y в диапазоне $-128 \leqslant x \leqslant 127$, $-128 \leqslant y \leqslant 127$, вычислите правую часть уравнения (1.3) по формуле:

$$u(x, y) = A^* p = \int_{\theta} p(x\cos(\theta) + y\sin(\theta), \theta) d\theta.$$

Для приближённого вычисления интеграла используйте сетку по (l, θ), заданную в п. 1. Выведите полученное изображение на экран. Сравните изображение с фантомом. Убедитесь в том, что в результате получится «дефокусированное» изображение фантома, такое как на рис. 1.9.

3. Используя MATLAB либо самостоятельно написанную вами программу, вычислите преобразование Фурье $\tilde{U}(\omega_1, \omega_2)$ от $u(x, y)$. Вычислите $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$, воспользовавшись представлением:

$$\tilde{F}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\, \tilde{U}(\omega_1, \omega_2).$$

4. Вычислите обратное преобразование Фурье от $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$ и получите искомую функцию поглощения $f(x, y)$. Сравните полученное изображение с фантомом.

Задача № 3. Реконструкция томографических данных в полном диапазоне углов с неточно заданными данными

Выполните следующие операции:

1. Внесите погрешность в экспериментальные данные $p(l, \theta)$, полученные в задаче № 2 на шаге 1. Для этого добавьте к каждому значению $p(l, \theta)$ случайную погрешность, равномерно распределённую в диапазоне $[-\delta, \delta]$. Выберите уровень погрешности δ, равный $0.05 \max_{l,\theta} |p(l, \theta)|$.

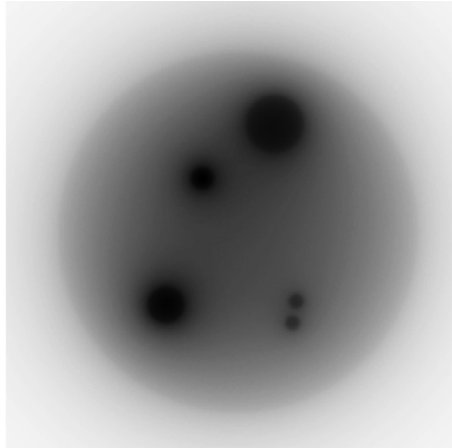


Рис. 1.9. Изображение $u(x, y) = A^* p$

2. Вычислите приближённое значение правой части уравнения:

$$u_\delta(x, y) = A^* p = \int_\theta p_\delta(x\cos(\theta) + y\sin(\theta), \theta) d\theta.$$

3. Вычислите преобразование Фурье $\tilde{U}_\delta(\omega_1, \omega_2)$ от $u_\delta(x, y)$. Пользуясь представлением $\tilde{F}_\delta(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\,\tilde{U}_\delta(\omega_1, \omega_2)$ и выполнив обратное преобразование Фурье, получите реконструированное изображение $f_\delta(x, y)$.

4. Сравните полученные результаты с результатами решения задачи № 2. Проделайте те же операции при уровне погрешности $\delta = 0.01 \max_{l,\theta} |p(l, \theta)|$.

Задача № 4. Реконструкция томографических данных в полном диапазоне углов с использованием GPU

Выполните следующие операции:

1. Используя видеокарту, решите задачу № 3 на сетке 2048×2048 точек с шагом сетки 0.125 мм по x, y.

Сравните время реконструкции на обычном персональном компьютере и на персональном компьютере с графической картой. Оцените выигрыш во времени, который составляет для разных графических карт от десятков до сотен раз.

2. В реальных рентгеновских томографах экспериментальные данные собираются одновременно для реконструкции нескольких сотен сечений. Для реконструкции большого количества сечений за приемлемое время используется персональный компьютер с несколькими мощными графическими картами.

Оцените, какое время нужно для реконструкции 1000 сечений 2048 × 2048 на таком компьютере, используя приведённый выше алгоритм. Убедитесь, что для реконструкции сечений достаточно нескольких минут.

Задача № 5. Реконструкция томографических данных с неполными данными в модели, описываемой системой линейных алгебраических уравнений

В задаче № 5 необходимо реконструировать фрагмент изображения слоёв многослойной печатной платы. В модельной задаче используется схема томографического исследования PCB, представленная на рис. 1.2. Многослойная печатная плата облучается параллельным пучком рентгеновских лучей. Результат (проекция) регистрируется в плоскости,

параллельной плоскости печатной платы. В эксперименте используется несколько проекций, полученных под разными углами.

Выполните следующие операции:

1. Составьте программу, которая задаёт коэффициенты поглощения $f_i(x, y)$ в четырёх слоях фрагмента печатной платы. Изображение фантома представлено на рис. 1.10. Коэффициенты поглощения $f_i(x, y)$ задаются на сетке $x = 1, 2...256$; $y = 1, 2...256$ следующим образом:

Слой 1: $f_1(x, y) = k_1 + k_2 \cdot (\max(\mathrm{round}(|x - x_0|/d), \mathrm{round}(|y - y_0|/d)) \bmod 2)$;

Слой 2: $f_2(x, y) = k_1 + k_2 \cdot (\mathrm{round}((x - x_0)/d) \bmod 2)$;

Слой 3: $f_3(x, y) = k_1 + k_2 \cdot \max(\mathrm{round}((x - x_0)/d) \bmod 2, \mathrm{round}((y - y_0)/d) \bmod 2)$;

Слой 4: $f_4(x, y) = k_1 + k_2 \cdot (\mathrm{round}((y - y_0)/d) \bmod 2)$;

где $x_0 = y_0 = 128$, $d = 5$, $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.4$; вне диапазона $24 < x < 232$, $24 < y < 232$ все $f_i(x, y) = k_1$.

2. Вычислите проекции $u_k(x, y)$ в каждом из 8 экспериментов, $k = 1...8$. Для этого используйте представление для функций $f_1(x, y)...f_4(x, y)$ и формулу (1.7) для $N = 4$:

$$\sum_{j=1}^{4} f_j(x + (j-1)\Delta x_k, y + (j-1)\Delta y_k) = u_k(x, y), \ \ k = 1...8.$$

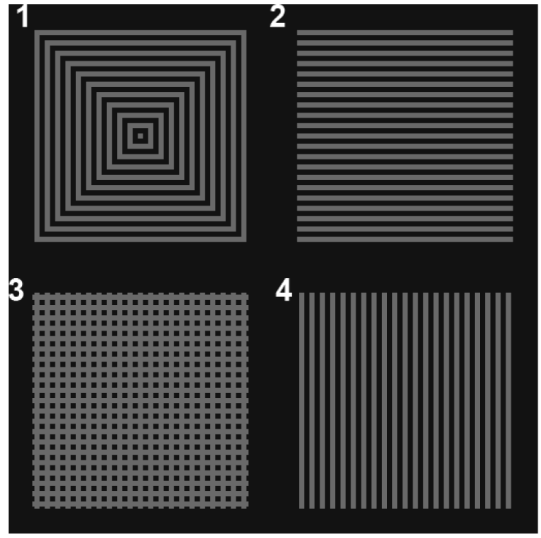


Рис. 1.10. Фантом 4-слойной печатной платы

В каждом эксперименте фрагмент многослойной печатной платы освещается параллельными рентгеновскими лучами под заданным углом. В эксперименте меряется суммарное поглощение на луче, проходящем через точку (x, y) первого слоя. На первом слое поглощение определяется функцией $f_1(x, y)$. Для каждого эксперимента $k = 1...8$ используйте следующие величины $(\Delta x_k, \Delta y_k)$:

Таблица 1.2

Значения векторов смещений для проекций

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$(\Delta x_k, \Delta y_k)$	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(1, –1)	(2, 1)	(1, –2)	(3, 1)	(–1, 3)

Входные данные функции $u_k(x, y)$ определяют суммарное поглощение на луче, проходящем через точку (x, y) под заданными углами, которые определяют вектора смещения $(\Delta x_k, \Delta y_k)$. Примеры проекций приведены на рис. 1.11.

3. Вычислите образы Фурье $\tilde{U}_k(\omega_1, \omega_2)$ от проекций $u_k(x, y)$.

4. Для каждой точки (ω_1, ω_2) выпишем систему линейных алгебраических уравнений $A\tilde{F} = \tilde{U}$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{jk}(\omega_1, \omega_2)\tilde{F}_j(\omega_1, \omega_2) = \tilde{U}_k(\omega_1, \omega_2),\ k = 1...8. \qquad (1.19)$$

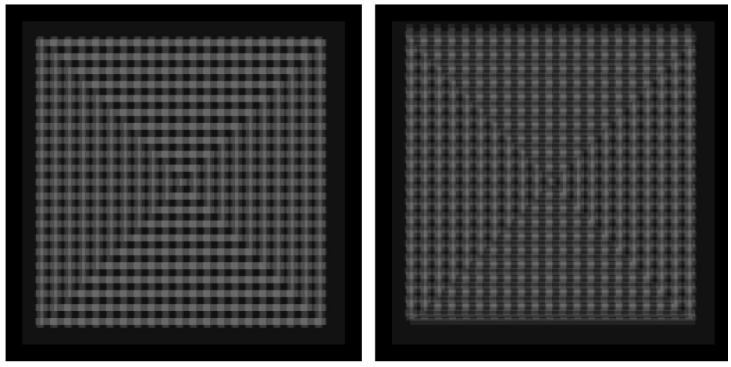


Рис. 1.11. Примеры проекций $u_k(x, y)$ для $k = 1$ и $k = 7$

Коэффициенты $a_{jk}(\omega_1, \omega_2)$ вычисляются по компонентам векторов смещения $\mathbf{\Delta}_{jk}$: $a_{jk}(\omega_1, \omega_2) = \exp(-i(\mathbf{\Delta}_{jk}, \boldsymbol{\omega}))$. Здесь вектор $\mathbf{\Delta}_{jk}$ имеет компоненты $((j\text{-}1)\,\Delta x_k, (j-1)\,\Delta y_k)$, вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.

Убедитесь в том, что точно решить систему (1.19) невозможно из-за её плохой обусловленности.

5. Для приближённого решения системы уравнений (1.19) в каждой фиксированной точке (ω_1, ω_2) используйте Тихоновскую схему с параметром регуляризации α. В этом случае задача (1.19) заменяется на задачу:

$$(A^* A + \alpha E)\tilde{F} = A^* \tilde{U}. \qquad (1.20)$$

В модельном эксперименте мы считаем точность входных данных высокой, поэтому положите $\alpha = 10^{-6}$. Решите систему уравнений (1.20) при этом значении α. Выполнив обратное преобразование Фурье от $\tilde{F}_i$, получите реконструированные изображения слоёв $f_i(x, y)$. Сравните полученное изображение с фантомом.

Задача № 5. Реконструкция томографических данных с неполным диапазоном данных итерационным методом

Выполните следующие операции:

1. Используйте $\tilde{U}_k(\omega_1, \omega_2)$ из задачи № 2.

2. Систему линейных алгебраических уравнений (1.19) в каждой фиксированной точке (ω_1, ω_2) представьте в виде $A\tilde{F} = \tilde{U}$. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений $A\tilde{F} = \tilde{U}$ воспользуйтесь методом простой итерации, который заключается в следующем:

$$\tilde{F}^{(0)} = 0,$$
$$\tilde{F}^{(n+1)} = \tilde{F}^{(n)} - \mu A^* A\tilde{F}^{(n)} - \mu A^* \tilde{U}.$$

Метод простой итерации сходится, если $0 < \mu < 2/\|A^*A\|$. Для каждой точки (ω_1, ω_2) вычислите $\|A^*A\|$. Положите $\mu = 1.9/\|A^*A\|$. Квадрат нормы оператора равняется сумме квадратов всех его компонент. Выполните 200 итераций.

3. Вычислите реконструированные изображения слоёв $f_i(x, y)$. Для этого выполните обратное преобразование Фурье от $\tilde{F}_i$. Сравните полученные изображения с фантомом.

Глава 2

Интегральный подход к решению коэффициентных обратных задач в скалярной волновой модели

2.1. Введение

В главе 1 было показано, что в настоящее время алгоритмы решения обратных задач рентгеновской томографии разработаны, что позволяет получать детальную информацию о внутренней структуре исследуемых объектов. Разрешение современных медицинских рентгеновских томографов достигает 1–2 мм. Значительно более скромные результаты в ультразвуковых, акустических, сейсмических, электромагнитных томографических исследованиях связаны с тем, что даже в простейших моделях скалярного волнового уравнения обратные задачи интерпретации данных приводят к сложным нелинейным трёхмерным задачам. Для получения высокого разрешения эти трёхмерные задачи в силу значимости волновых эффектов, вообще говоря, некорректно представлять как набор двумерных задач и использовать лучевые модели.

В главе 2 рассматривается интегральный подход к решению обратной задачи волновой томографии, основанный на использовании метода функции Грина. Обратные задачи в интегральном подходе можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода. Полученная задача является некорректно поставленной. Для неё разработан богатый арсенал итеративных методов решения [37]. Эффективность разработанных алгоритмов иллюстрируется в главе 2 решением модельных задач реконструкции структуры приповерхностных слоёв Земли с использованием волновых источников излучения. Модельные задачи решались на суперкомпьютере «Ломоносов». На модельных задачах показано, что этот подход оказывается эффективным только на грубой сетке для решения задач волновой диагностики, например, для исследования приповерхностных слоёв Земли. На грубой сетке в рамках предложенного подхода удаётся получать информацию о трёхмерной структуре неоднородностей.

Однако количество операций, необходимых для решения обратных задач 3D волновой томографии в рамках интегрального подхода, растёт как n^9, где n – количество отсчётов сетки по одной координате. Это означает, что увеличение мощности компьютера в 1000 раз позволяет увеличить количество точек сетки n только в 2 раза. Таким образом, для получения детальной информации, характерной для томографических исследований, реализовать интегральный подход не представляется возможным. В главах 3–6 предложен принципиально другой метод решения обратных задач 3D волновой томографии, который вполне реализуем на современных суперЭВМ. Этот метод базируется на дифференциальном подходе к решению коэффициентных обратных задач для волнового уравнения.

Интегральный подход оказывается весьма эффективным для исследования линеаризованных приближений задач волновой томографии. В отличие от исходной нелинейной обратной задачи, в некоторых линеаризованных моделях проблем с вычислительной сложностью уже не возникает. В этой главе рассматриваются различные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии в линеаризованных моделях. Одной из наиболее интересных задач является дистанционное зондирование поверхности Земли с помощью радиолокационных систем с синтезированной апертурой (РЛС СА) [41].

Методы синтезированной апертуры находят применение в самых различных областях волнового зондирования. Можно выделить две большие группы РЛС с синтезированной апертурой: это РЛС авиационного базирования, имеющие разрешающую способность до сантиметров, и космического базирования, имеющие разрешающую способность порядка нескольких метров. Такие системы используются для мониторинга труднодоступных участков хозяйственной деятельности (наблюдение, классификация, оценка биомассы растительного покрова, мониторинг состояния подземных трубопроводов) и т. п. [46–49]. Методы синтезированной апертуры применяются и в медицине [50]. Широко используются методы синтезирования апертуры в гидролокации, где созданы специальные устройства для подводного наблюдения [51].

В задачах дистанционного зондирования с помощью РЛС с синтезированной апертурой радиолокатор двигается по заданной траектории, излучая зондирующие импульсы и принимая и записывая отражённый сигнал. Синтезируя виртуальную антенну, длина которой в сотни и тысячи раз превосходит размеры локатора, можно многократно повысить

разрешающую способность РЛС с синтезированной апертурой. Математические модели РЛС СА являются линейными и вполне могут быть решены на современных ЭВМ. Обработка данных РЛС с синтезированной апертурой часто осуществляется в режиме реального времени. Особенностью рассматриваемых задач являются огромные массивы входных данных. Для распараллеливания вычислений в таких задачах целесообразно использовать суперкомпьютерные технологии.

2.2. Интегральная постановка коэффициентной обратной задачи волновой томографии

Распространение акустического или электромагнитного излучения в неоднородной среде в простейшем волновом приближении описывается следующей известной скалярной волновой моделью гиперболического типа:

$$\Delta u(r,q,t) - \frac{1}{c^2(r)} u_{tt}(r,q,t) = \delta(r-q) f(t), \qquad (2.1)$$

где $u(r,q,t)$ – скалярная волновая функция в среде, зависящая от пространственной переменной $r \in \mathbf{R}^3$ и времени $t \geq 0$, Δ – оператор Лапласа, $c(r)$ – скорость распространения излучения, $\delta(r-q)f(t)$ описывает возмущение среды точечным источником, располагающимся в точке $q \in \mathbf{R}^3$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Начальные условия имеют вид $u(r,q,t)\,\big|_{t=0} = 0$; $u_t(r,q,t)\,\big|_{t=0} = 0$.

Рассмотрим следующую хорошо известную общую постановку обратной задачи (рис. 2.1). Пусть неоднородность среды локализована в области R. Предположим, что источники волн (положение которых характеризуется координатой q) располагаются в области Q ($q \in \mathrm{Q}$), а измерения поля $u(r,q,t)$ доступны только в области P ($r \in \mathrm{P}$). Область R не имеет общих точек с областями Q и P, в то время как Q и P могут пересекаться или совпадать. Будем предполагать, что $c(r)$ – гладкая функция, отличающаяся от известной константы c_0 только в пределах области R ($0 < c_1 < c^2(r) < c_2$). Функция $f(t)$, описывающая возмущение, известна априори. В обратной задаче мы должны определить неизвестную функцию $c(r)$ при $r \in \mathrm{R}$, используя экспериментальные данные $u(r,q,t)$, полученные при $r \in \mathrm{P}$. Такая обратная задача является нелинейной, т. к. функция $u(r,q,t)$ при $r \notin \mathrm{P}$ – не известна.

Рис. 2.1. Схема эксперимента

Выше была приведена постановка задачи во временной области. Приведем постановку в частотной области. Взяв Фурье-преобразование по времени от левой и правой части уравнения (2.1), задачу можно свести к уравнению Гельмгольца.

Рассмотрим задачу, когда источник является точечным гармоническим осциллятором. В этом случае задача может быть описана уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(r,q,\omega)+\kappa^2(r,\omega)u(r,q,\omega)=f(r,q,\omega). \qquad (2.2)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа по переменной r. Это уравнение в скалярном приближении описывает акустическое или электромагнитное поле $u(r,q,\omega)$, генерируемое источником, описываемым функцией $f(r,q,\omega)$. Если источник расположен в точке $q\in \mathrm{Q}$, то эта функция имеет вид $f(r,q,\omega)=-\delta(r-q)$, ω – круговая частота источника излучения. Неоднородность среды вызвана только изменениями фазовой скорости $c(r)$, имеет место соотношение $\kappa(r,\omega)=\omega/c(r)$. Вне области неоднородности $\kappa(r,\omega)=\kappa_0=\omega/c_0$, где $c_0=const$ – известна.

В обратной задаче, как и выше, мы должны определить неизвестную функцию $c(r)$ при $r\in \mathrm{R}$, используя экспериментальные данные $u(r,q,\omega)$, полученные при $r\in \mathrm{P}$ для некоторого набора частот ω и набора положений источника $q\in \mathrm{Q}$.

Рассмотрим хорошо известный подход к решению коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей в частотной области, основанный на интегральном представлении, который базируется на использовании аппарата функции Грина. Хорошо известно, что функция Грина для уравнения (2.2) в однородной среде удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(r,q,\omega)+\frac{\omega^2}{c_0^{\,2}}G(r,q,\omega)=-\delta(r-q)$$

и имеет вид

$$G(r, g, \omega) = \frac{1}{4\pi\|r-q\|} \cdot \exp(\iota \frac{\omega}{c_0}\|r-q\|).$$

Как и прежде, будем предполагать, что поле $u(r, q, \omega)$ измеряется в области P ($r \in$ P), т. е. приёмники излучения пробегают область P. Точечные источники излучения пробегают область Q ($q \in$ Q), неоднородность расположена в ограниченной области R. Раздельно записывая уравнения для областей R и P, получаем нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} u(r,q,\omega) = u_0(r,q,\omega) + \omega^2 \int\limits_{\mathrm{R}} G(r',r,\omega)\xi(r')u(r',q,\omega)dr', \; r \in \mathrm{R} \\ U(p,q,\omega) = \omega^2 \int\limits_{\mathrm{R}} G(r',p,\omega)\xi(r')u(r',q,\omega)dr', \; p \in \mathrm{P}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь

$U(p,q,\omega) = u(p,q,\omega) - u_0(p,q,\omega)$, $u_0(r,q,\omega) = -\int\limits_{\mathrm{Q}} G(r',r,\omega) f(r',q,\omega)dr'$,

$\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$.

Введём в рассмотрение вектор $X = \begin{pmatrix} \xi(r) \\ u(r,q,\omega) \end{pmatrix}$.

Систему (2.3) можно записать в следующем виде:

$$F(X) = 0, \tag{2.4}$$

где

$$F(X) = \begin{cases} u(r,q,\omega) - u_0(r,q,\omega) - \omega^2 \int\limits_{\mathrm{R}} G(r',r,\omega)\xi(r')u(r',q,\omega)dr' \\ \omega^2 \int\limits_{\mathrm{R}} G(r',p,\omega)\xi(r')u(r',q,\omega)dr' - U(p,q,\omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) является интегральным уравнением первого рода в некоторых гильбертовых пространствах относительно функций $\xi(r)$ и $u(r, q, \omega)$. Это уравнение нелинейно, поскольку неизвестные функции входят в уравнение в виде произведения.

В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды $\xi(r)$ и поле $u(r, q, \omega)$. Известной является функция $U(p, q, \omega)$, полученная в результате измерений в области расположения приёмников. Требуется по

этим измерениям, полученным для некоторого набора частот ω и набора положений источника $q \in \mathrm{Q}$, восстановить неоднородность среды $\xi(r)$.

2.3. Методы и алгоритмы решения нелинейной обратной задачи волновой томографии в интегральной постановке

2.3.1. Итерационные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии в интегральной постановке

Полученная задача (2.4)–(2.5) является некорректно поставленной и может быть решена, например, итеративно-регуляризованным методом Гаусса–Ньютона, описанным в [10, 37],

$$X_{s+1} = X_s - (F_s'^{\,*} F_s' + \alpha_s E)^{-1} (F_s'^{\,*} F(X_s) + \alpha_s (X_s - \zeta)), \qquad (2.6)$$

где s – номер итерации, $F_s' = F'(X_s)$ – производная Фреше для (2.5), $F_s'^{\,*}$ — оператор, сопряженный F_s'. Подходящий выбор последовательности α_s и элемента ζ обеспечивают регуляризирующие свойства алгоритма.

Оказывается, можно явно выписать формулы для $F_s' = F'(X_s)$ и $F_s'^{\,*} F_s'$ [52]. В конечномерном виде матрица $F_s'^{\,*} F_s'$ имеет размер $N(t+1) \times N(t+1)$ и представляет собой разреженную матрицу, состоящую из $(t+1) \times (t+1)$ блоков с размером блоков $N \times N$:

$$F_s^* F_s' = \begin{pmatrix} (N\times N) & 0 & \dots & 0 & (N\times N) \\ 0 & (N\times N) & \dots & 0 & (N\times N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (N\times N) & (N\times N) \\ (N\times N) & (N\times N) & \dots & (N\times N) & (N\times N) \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

где s – номер итерации, N – количество точек сетки в объёме расчётной области R, $t = N_\omega \cdot N_q$, N_ω – число используемых частот зондирования, N_q – число положений источников.

Однако даже возможность выписать явные выражения для матриц не позволяет эффективно решать рассматриваемую обратную задачу. Дело в том, что эта задача с вычислительной точки зрения является очень трудоёмкой. Количество неизвестных задачи растёт примерно как $O(tn^3)$, где n — число точек в одном направлении трёхмерной сетки ($N = n^3$).

Наиболее вычислительно-трудоемкими операциями в рассматриваемой процедуре Гаусса–Ньютона (2.6) являются вычисление матрицы $F_s'^{\,*}F_s'$ (2.7) и обращение оператора $(F_s'^{\,*}F_s'+\alpha_s E)$ на каждой итерации процедуры Гаусса–Ньютона. Для вычисления матрицы необходимо выполнить порядка $O(tn^9)$ операций типа сложения-умножения. Для обращения оператора итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка $O(tn^6)$ операций (количество итераций составляет, как правило, несколько сотен) [35].

Такие задачи при n > 20 уже невозможно решать на персональном компьютере! Казалось бы, приведённый пример ещё раз подтверждает важность развития суперкомпьютерных технологий. Но не всё так просто. Если провести простую оценку, то оказывается, что, даже увеличивая мощность вычислительной системы в 1000 раз, мы сможем увеличить размер сетки только в 2 раза. Оценка $O(tn^9)$ «ставит крест» на возможности решения обратной задачи рассматриваемым методом на больших расчётных сетках в настоящее время. А согласно закону Мура, увеличить размер сетки в 2 раза можно будет только через 20 лет! Пример этой задачи очень важен, поскольку наглядно иллюстрирует, что при решении 3D задач томографии в волновой постановке при большом количестве узлов сетки необходимо искать более эффективные методы. Приведённые ниже алгоритмы оказываются эффективными при небольшом количестве узлов сетки.

Рассмотренный выше алгоритм приводит к вычислению вектора $X=\begin{pmatrix}\xi(r)\\ u(r,q,\omega)\end{pmatrix}$. В реальности нас интересует только компонента $\xi(r)$, описывающая неоднородность. Эту особенность задачи можно использовать следующим образом. Нелинейную систему уравнений (2.3) запишем в виде

$$\begin{cases} F_1(u,\xi)=0,\\ F_2(u,\xi)=0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь F_1 и F_2 – отображения гильбертовых пространств H_1 и H_2 в общем случае в другие пространства H_1' и H_2', обладающие, будем предполагать, следующими свойствами: F_1 и F_2 – непрерывные, частные производные F_{1u}, F_{2u}, $F_{1\xi}$, $F_{2\xi}$ существуют в H_1 и H_2 соответственно, а

оператор F_{1u} имеет ограниченный обратный оператор. Путём исключения неизвестного поля $u(r,q,\omega)$ из системы (2.8) мы получаем операторное уравнение для нахождения $\xi(r)$:

$$F_2(\varphi(\xi),\xi)=0, \tag{2.9}$$

где $\varphi(\xi)$ определяет непрерывное отображение $u=\varphi(\xi)$. При выполнении вышеперечисленных условий на F_1 и F_2 отображение $\varphi(\xi)$ дифференцируемо и выполняется равенство

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=-\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)^{-1}.$$

Заметим, что

$$F_2^{'}=\frac{\partial F_2}{\partial u}\cdot\left(-\frac{\partial F_1}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)^{-1}\right)+\frac{\partial F_2}{\partial \xi},$$

и, следовательно, итерации Ньютона–Гаусса для уравнения (2.9) будут иметь вид

$$\xi_{s+1}=\xi_s-(F_{2s}'^{\,*}F_{2s}'+\alpha_s E)^{-1}(F_{2s}'^{\,*}F_{2s}(\varphi(\xi_s),\xi_s)+\alpha_s(\xi_s-\zeta_s)). \tag{2.10}$$

Здесь α_s – некоторые положительные числовые параметры, ζ_s – некоторый элемент H_2.

Итерационный процесс (2.10) с вычислительной точки зрения также является трудоёмким. В отличие от итерационного процесса (2.6) число неизвестных несколько меньше – порядка $O(n^3)$. Для обращения оператора $\left(F_{2s}'^{\,*}F_{2s}'+\alpha_s E\right)$ итерационными методами необходимо выполнить на каждом шаге итераций порядка $O(n^6)$ операций, что также меньше, чем для процесса (2.6). Однако для вычисления матрицы $\left(F_{2s}'^{\,*}F_{2s}'+\alpha_s E\right)$ необходимо выполнить по-прежнему порядка $O(tn^9)$ операций типа сложения-умножения.

2.3.2. Модельные расчёты обратных задач волновой томографии в интегральной постановке

Для оценки эффективности предложенных в разделе 2.3.1 алгоритмов были решены модельные задачи восстановления структуры приповерхностного слоя Земли. Численные эксперименты по решению обратной задачи были проведены на суперкомпьютере «Чебышев». Для решения

3D обратных задач волновой томографии использовался итеративно-регуляризованный метод Гаусса–Ньютона (2.6). Обращение матрицы выполнялось итеративными методами, которые состоят из многократного повторения стандартной операции умножения матрицы на вектор. Преимущество итеративных методов в сравнении с методами прямого обращения матрицы состоит в возможности их простого распараллеливания. Распараллеливание этой операции выполняется следующим образом: каждый процесс хранит только некоторую часть строк матрицы и выполняет умножение на вектор только этих строк. Учитывая, что количество строк матрицы может составлять до нескольких десятков тысяч, такое распараллеливание очень эффективно и, что важно, масштабируется до большого числа процессов.

Рассмотрим следующую модель для численного эксперимента. На глубине 45 м под поверхностью Земли располагалось два одинаково отражающих объекта на расстоянии 90 м между собой и один такой же объект на глубине 135 м (см. рис. 2.2). Фазовая скорость в среде равна $c_0 = 1800$ м/с. На поверхности Земли над объектами симметрично в квадрате размером 380 × 380 метров располагалось 40 × 40 приёмников в узлах решётки с равномерным шагом. Источник располагался на поверхности посередине между объектами. Зондирование проводилось на частотах 40 и 60 Гц, что соответствует длинам волн 45 и 30 м. При решении обратной задачи область расчётов R имела размеры 180 × 180 × 180 метров, в ней была введена сетка 33 × 33 × 33 точек. Время расчёта одной итерации итерационного процесса (2.6) на 512 вычислительных ядрах составило около 7.5 ч. Число неизвестных составило около 110000 комплексных чисел.

На рис. 2.2, *а*, *б*, *в* приведено изображение амплитуды исходных данных в вертикальном и горизонтальных сечениях, проходящих через объекты. На рис. 2.3 приведено восстановленное изображение в тех же сечениях. Модельные расчёты показывают, что в рамках поставленной обратной задачи волновой томографии удаётся локализовать положения неоднородностей как в непосредственной близости к поверхности, так и на глубине.

В приведённом численном эксперименте источники и приёмники располагались только на поверхности Земли. Это, разумеется, накладывает ограничения на разрешающую способность сейсмических методов. Несколько лучше ситуация в инженерной сейсмике, когда исследуются небольшие области размерами в десятки метров. В этом случае можно

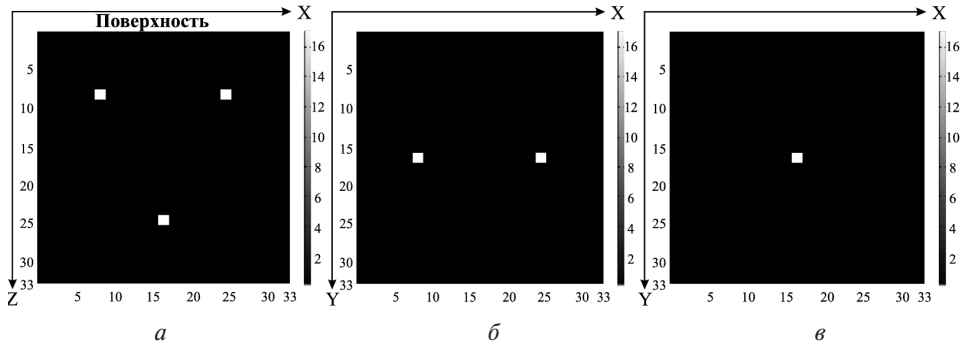


Рис. 2.2. Исходное изображение трёх объектов:
а – сечение в вертикальной плоскости, *б* – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через два объекта, *в* – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через один объект

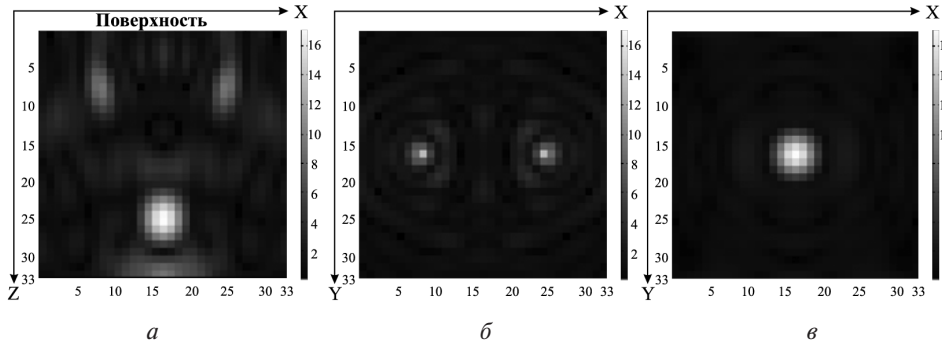
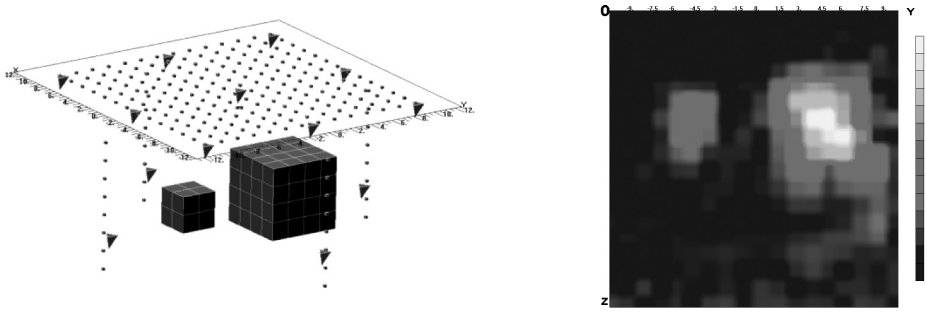


Рис. 2.3. Восстановленное изображение трех объектов:
а – сечение в вертикальной плоскости, *б* – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через два объекта, *в* – сечение в горизонтальной плоскости, проходящее через один объект

расположить источники и приёмники не только на поверхности, но и в шурфах, окружающих исследуемую область. На рис. 2.4, *а* приведена схема модельного эксперимента (источники обозначены конусами, а приёмники – точками). Источники и приёмники располагались на поверхности Земли (в плоскости $z = 0$) в области размером 20 × 20 м и в вертикальных шурфах глубиной до 10 м. Неоднородность выбрана в виде двух кубов. Размеры неоднородностей составляют 3 м и 6 м, шаг сетки – 1.5 м. Фазовая скорость в неоднородностях равна 2000 м/с, а в



а *б*

Рис. 2.4. Схема эксперимента с шурфами (*а*); сечение в плоскости OYZ результата реконструкции двух неоднородностей на сетке 18 × 18 × 18 точек (*б*)

окружающем объёме – 1000 м/с. Задача решалась на одной частоте 100 Гц. На рис. 2.4, *б* изображено сечение результата реконструкции обратной задачи в плоскости OYZ на сетке 18 × 18 × 18 точек.

Как видно из модельных расчётов, рассматриваемая нелинейная обратная задача в интегральном представлении из-за огромного объёма вычислений является сложной для реализации даже на современных суперкомпьютерах. Даже использование 512 вычислительных ядер позволяет проводить расчёты только на сетке не более 20–30 точек по каждой координате, что недостаточно для сложных задач с реальными данными.

Естественным выходом в этом случае является линеаризация интегральных уравнений (приближения Борна, Рытова и т. д.) [53, 54, 55]. Использование линеаризованных приближений в интегральном подходе значительно сокращает объём вычислений. Однако возможности применения этих приближений в реальных задачах для сложных неоднородных сред достаточно ограничены из-за упрощения модели. Тем не менее линеаризованные приближения можно использовать в случае простой структуры неоднородности (например, локализованных неоднородностей малого размера) или для получения начальных приближений итерационных процедур решения нелинейных обратных задач.

2.4. Линеаризованные модели в задачах волновой диагностики

2.4.1. Задача синтезирования апертуры для широкополосного импульса

Рассмотрим линеаризованный интегральный подход к решению трёхмерных коэффициентных обратных задач во временной области в

скалярной волновой модели (2.1). В приближении Борна для трёхмерной задачи со специальным набором экспериментальных данных с короткоимпульсными источниками возмущений рассмотрим эффективный метод обращения, позволяющий решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке. Рассмотренная постановка задачи относится к методам синтезированной апертуры для широкополосного зондирующего импульса.

Введём, как и выше, обозначение $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$, тогда уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\Delta u(r,q,t) - \frac{1}{c_0^2(r)} u_{tt}(r,q,t) = \delta(r-q) f(t) - u_{tt}(r,q,t)\xi(r). \quad (2.11)$$

Обозначим через $G(r,t,q,\tau)$ функцию Грина для волнового уравнения (2.11)

$$G(r,t,q,\tau) = \frac{1}{4\pi|r-q|}\delta\left(t-\tau-\frac{|r-q|}{c_0}\right). \quad (2.12)$$

Легко видеть, что (2.11) может быть переписано как

$$\begin{aligned} u(r,q,t) - \frac{1}{4\pi|r-q|} f\left(t-\frac{|r-q|}{c_0}\right) = \\ = -\int_{\mathrm{R}} \Big(\int_{\tau\geq 0} u_{\tau\tau}(\tilde{r},q,\tau)\cdot\xi(\tilde{r})\cdot G(r,t,\tilde{r},\tau)\,d\tau\Big)\,d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим борновское приближение [55], т. е. будем считать, что функция $u(\tilde{r},q,t)$, стоящая под интегралом в правой части (2.13), равна

$$u(\tilde{r},q,t) = \frac{1}{4\pi|\tilde{r}-q|} f\left(\tau-\frac{|\tilde{r}-q|}{c_0}\right). \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.13), а также интегрируя по τ в (2.13), имеем

$$U(r,q,t) = \int_{\mathrm{R}} \frac{1}{16\pi^2|\tilde{r}-r||\tilde{r}-q|} f''\left(t-\frac{|\tilde{r}-r|+|\tilde{r}-q|}{c_0}\right)\cdot\xi(\tilde{r})\,d\tilde{r}, \quad (2.15)$$

где через $U(r,q,t)$ обозначена левая часть уравнения (2.13), которая известна в области измерений (при $r \in \mathrm{P}$). Таким образом, обратная

задача в борновском приближении сводится к определению $\xi(\tilde{r})$ из линейного интегрального уравнения (2.15).

Борновское приближение позволяет линеаризовать уравнение, поскольку вместо произведения двух неизвестных функций $u_{\tau\tau}(\tilde{r}, q, \tau)\xi(\tilde{r})$, мы получаем произведение известной функции $f''(\cdot)$ на неизвестную $\xi(r)$. Линейные уравнения, как известно, решать значительно проще, чем нелинейные. Конечно, борновское приближение справедливо отнюдь не всегда. Оно предполагает, что волна в рассматриваемой среде не претерпевает деформаций и распространяется примерно так же, как в однородной среде. Однако существует целый ряд важных приложений, где это приближение допустимо. Некоторые из них рассмотрены в этой главе.

Для короткоимпульсных источников возмущений основные значения функции $f(t)$ сосредоточены при малых *t*. Будем считать, что функция $f''(t) = \delta(\cdot)$. В этом случае уравнение (2.15) сводится к виду

$$U(r, q, t) = -\int_{\mathrm{R}} \frac{1}{16\pi^2 |\tilde{r} - r| |\tilde{r} - q|} \delta\left(t - \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0}\right) \cdot \xi(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (2.16)$$

Заметим, что интеграл в уравнении (2.16) имеет специальный вид. Он представляет собой интеграл от функции $\xi(\tilde{r})$ с некоторым весовым множителем по двумерной поверхности пересечения области R и эллипсоида

$$t = \frac{|\tilde{r} - r| + |\tilde{r} - q|}{c_0} \quad (2.17)$$

при различных значениях параметров *t*, *r*, *q*. Параметры *r*, *q* определяют фокусы эллипсоида, а параметр *t* — размер эллипсоида. Подобная задача относится к области томографических задач, в которых требуется найти некоторую функцию в $\mathbf{R}^3$ по известным интегралам от этой функции вдоль различных двумерных поверхностей [34].

2.4.2. Метод прямого обращения в линеаризованных задачах волновой диагностики

Остановимся на методах решения томографического уравнения (2.16) для некоторых специальных случаев [34]. Алгоритм разбивается на два этапа. На первом этапе левая и правая часть уравнения (2.16) умножаются на R^*. Уравнение принимает вид

$$R^*U = R^*R\xi, \tag{2.18}$$

где через R обозначен интегральный оператор (2.16), R^* – оператор, имеющий вид

$$R^*U(r,q,t) =$$
$$= -\int\limits_{\mathrm{P}}\left(\int\limits_{t\geq 0}\frac{1}{16\pi^2|\tilde{r}-r||\tilde{r}-q|}\delta\left(t-\frac{|\tilde{r}-r|+|\tilde{r}-q|}{c_0}\right)U(r,q,t)dt\right)dr = v(\tilde{r},q), \tag{2.19}$$

где $\tilde{r}\in\mathbf{R}^3$.

Как видно, вычисление выражения (2.19) сводится к интегрированию с некоторым весовым множителем функции $U(r,q,t)$, измеренной в ходе эксперимента, по гиперболоидам, определяемым уравнением (2.17) в пространстве переменных *t, r*, при различных значениях параметра $\tilde{r}$.

Будем рассматривать задачу (2.16), когда источники и приёмники располагаются на плоскости $z=0$ $(r=(x,y,0))$. Будем считать, что измерения поля в эксперименте проводятся в точке расположения источника q, т. е. $r=q$. В задачах сейсморазведки задача с таким набором данных называется zero-offset data.

На втором этапе алгоритма осуществляется обращение уравнения (2.18), при условии $r=q$. Пусть $\xi(\tilde{r})$ описывает неоднородность $\tilde{r}\in\mathbf{R}^3$. Прямой оператор обозначим через R, тогда данные $U(r,t)$, записанные на поверхности $z=0$ $(r=(x,y,0))$, в приближении короткоимпульсных источников ($f''(\cdot)\to\delta(\cdot)$) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} R\xi = U(r,t) &= \int d\tilde{r}\frac{1}{16\pi^2|\tilde{r}-r|^2}\cdot\xi(\tilde{r})f''\left(t-\frac{2|\tilde{r}-r|}{c_0}\right) = \\ &= -\int d\tilde{r}\frac{1}{16\pi^2|\tilde{r}-r|^2}\xi(\tilde{r})\delta\left(t-\frac{2|\tilde{r}-r|}{c_0}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Сопряжённый оператор R^* имеет вид

$$R^*U(r,t)(\bar{r}) = W(\bar{r}) = -\int U(r,t)\frac{1}{16\pi^2|r-\bar{r}|^2}\cdot\delta\left(t-\frac{2|r-\bar{r}|}{c_0}\right)drdt, \tag{2.21}$$

где $\bar{r}\in\mathbf{R}^3$. Проводя некоторые вычисления, можно получить оператор $R^*R\xi$:

$$R^*R\xi = \frac{2c_0}{\left(16\pi^2\right)^2}\int\limits_H \frac{\sqrt{\left(\overline{x}-\tilde{x}\right)^2+\left(\overline{y}-\tilde{y}\right)^2}}{|\overline{r}-\tilde{r}|^2|\overline{r}-\tilde{r}^*|^2}\xi\left(\tilde{r}\right)d\tilde{r} = R^*U = v\left(\tilde{r}\right), \quad (2.22)$$

где $\tilde{r}=\left(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\right)\in\mathbf{R}^3$, $\overline{r}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in\mathbf{R}^3$, $\tilde{r}^*=\left(\tilde{x},\tilde{y},-\tilde{z}\right)\in\mathbf{R}^3$. Как можно заметить из (2.22), ядро оператора R^*R имеет особенность в точке $\tilde{r}$, однако R^*R не является единичным оператором.

Для получения функции $\xi\left(\tilde{r}\right)$ решим уравнение (2.22), которое является интегральным уравнением 1 рода. Уравнение (2.22) можно свести к виду:

$$\overline{z}R^*R\xi = \frac{2c_0}{\left(16\pi^2\right)^2}\int\limits_{H\cup H^*} \frac{\sqrt{\left(\overline{x}-\tilde{x}\right)^2+\left(\overline{y}-\tilde{y}\right)^2}}{|\overline{r}-\tilde{r}|^2}\frac{\xi\left(\tilde{r}\right)+\xi\left(\tilde{r}^*\right)}{4\tilde{z}}d\tilde{r} = \quad (2.23)$$

$$= \overline{z}v\left(\overline{r}\right) = \overline{z}R^*U,$$

где интегрирование проводится по области H и симметричной ей относительно плоскости $z=0$ области H^*. Уравнение (2.23) является уравнением типа свёртки относительно функции $\eta\left(\tilde{r}\right)=\dfrac{\xi\left(\tilde{r}\right)+\xi(\tilde{r}^*)}{4\tilde{z}}$, асимметричной относительно z.

Для получения приближённого решения в некорректно поставленной задаче (2.22) можно воспользоваться схемой Тихонова. В ней приближённое решение находится по формуле

$$\eta^\alpha = \left(R^*R+\alpha\cdot E\right)^{-1}\left(\overline{z}R^*U\right), \quad (2.24)$$

где α – параметр регуляризации. Для численной реализации алгоритма (2.23) для уравнений типа свёртки удобно использовать преобразование Фурье. Вычисляя аналитически преобразование Фурье от ядра уравнения (2.23), получаем явное выражение для алгоритма (2.24):

$$\xi^\alpha\left(\tilde{r}\right)+\xi^\alpha\left(\tilde{r}^*\right) = \frac{2\left(16\pi^2\right)^2}{c_0}\tilde{z}\cdot F^{-1}\left(\left(\frac{2\pi^2|w_3|}{\left(w_1^2+w_2^2+w_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\alpha\right)^{-1} F\left(\overline{z}\cdot R^*U\right)\right), \quad (2.25)$$

где F, F^{-1} – прямое и обратное преобразование Фурье в $\mathbf{R}^3$. Используя априорные данные о том, что H располагается в полуплоскости $z > 0$, выделяем функцию $\xi^{\alpha}(\tilde{r})$, рассматривая только такие точки, что $\tilde{z} > 0$.

Замечание 1. Предложенные алгоритмы по своей структуре похожи на хорошо известный алгоритм «ρ-фильтрации обратной проекции». Этот метод широко используется в задаче классической двумерной томографии реконструкции изображения по его интегральным характеристикам [56].

Замечание 2. В обратных задачах зачастую используется приближённый метод решения, заключающийся в том, что вместо обратного оператора R^{-1} используется сопряжённый оператор R^*. Такие методы распространены в сейсморазведке и получили название методов миграции [57]. Такая популярность применения сопряжённого оператора для обращения связана с тем, что, как правило, ядро оператора R^*R имеет особенность. В рассматриваемой задаче, как видно из (2.22), ядро оператора R^*R имеет особенность в точке $\tilde{r}$. Из приведённых ниже модельных расчётов видно, что методы полного обращения в обратной задаче позволяют получить гораздо лучшие результаты по сравнению с сопряжённым оператором.

2.4.3. Модельные расчёты в задаче синтезирования апертуры в 3D для широкополосного импульса

Приведём результаты модельных расчётов по решению прямой и обратной задачи рассмотренными выше методами. На первом этапе расчётов решалась прямая задача. Решение прямой задачи необходимо для получения данных на детекторах, которые в дальнейшем используются в обратной задаче в качестве экспериментальных данных. В прямой задаче задавалась модельная неоднородность, описываемая функцией $\xi(r)$. Место регистрации совпадает с местом возмущения среды и проводится на плоскости $z = 0$ в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Z направлена вниз, а неоднородность располагается в полупространстве $z > 0$. На рис. 2.5 приведены сечения в плоскости Oxz трёх модельных неоднородностей, описываемых функцией $\xi(r)$, которые использовались при решении двух модельных задач.

На втором этапе решалась обратная задача описанными выше методами. Были проведены модельные расчёты по реконструкции изображений

объектов методом обращения по формуле (2.22) и методом «приближенного» обращения с помощью сопряжённого оператора по формуле (2.19). Как видно из формулы (2.19), вычисления методом обратной проекции являются прямыми вычислениями, т. е. необходимо найти интеграл от известных экспериментальных данных $R^*U(r,t)(\bar{r})$ для набора точек $\bar{r} \in \mathbf{R}^3$.

На рис. 2.6 приведены сечения в плоскости Oxz трёх восстановленных методом обратной проекции модельных неоднородностей (см. рис. 2.5). Из рисунков видно, что этот метод позволяет получать лишь размазанное изображение.

Далее проводилось решение обратных задач методом обращения по формуле (2.25). Как видно из формулы (2.22), этот метод состоит из двух шагов: на первом шаге применяется сопряжённый оператор, а на втором – решается уравнение типа свёртки с помощью преобразования Фурье. На рис. 2.7 приведены сечения в плоскости Oxz трёх восстановленных методом обращения модельных неоднородностей на сетке

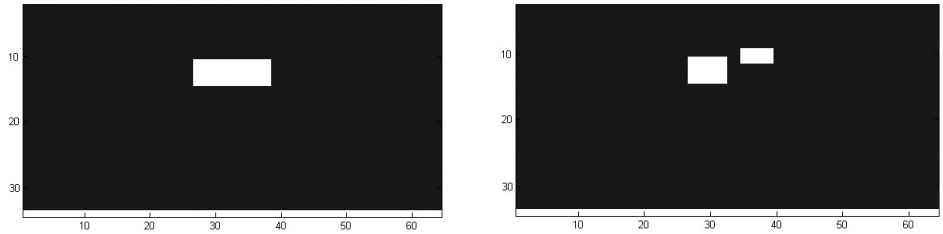
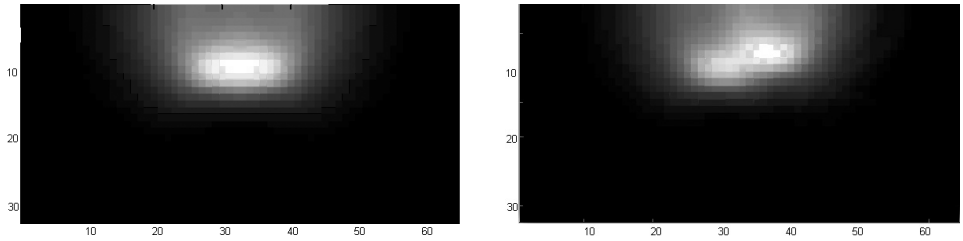
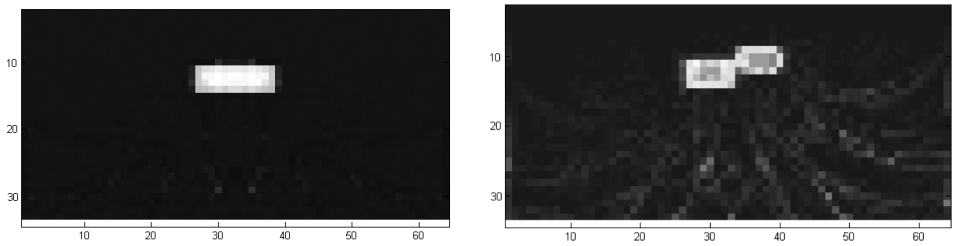


Рис. 2.5. Сечения в плоскости Oxz модельных неоднородностей



а *б*

Рис. 2.6. Сечения в плоскости Oxz восстановленные методом обратной проекции



а *б*

Рис. 2.7. Сечения в плоскости Oxz, восстановленные методом обращения

размера 64 × 64 × 32 точки. Время решения на 16 вычислительных ядрах суперкомпьютера «Чебышев» одной задачи составило около 20 сек. Результаты расчётов подтвердили высокие вычислительные возможности предлагаемого метода.

Экспериментальные данные для решения обратной задачи брались из решения прямой задачи (2.16). В силу сделанных выше упрощений, прямая задача (2.16) лишь приближённо описывает реальные физические процессы распространения и отражения волн. Рассмотренный подход может быть с успехом использован для обнаружения малоразмерных тел, границ объектов в задачах сейсморазведки, георадарного зондирования приповерхностных слоёв Земли, неразрушающего контроля в промышленности [37, 58, 59].

Анализируя вычислительный аспект рассматриваемого метода в трёхмерной задаче синтезирования апертуры для широкополосного импульса, можно видеть, что основной объём вычислений приходится на первый шаг расчётов по формуле (2.21). Эти вычисления легко распараллеливаются, поскольку представляют собой независимые расчёты для разных $\bar{r} \in \mathbf{R}^3$. Вычислительная сложность метода составляет порядка $O(n^5)$, где n – число точек сетки по одной координате. Как видно из приведённой задачи, линеаризация нелинейной обратной задачи в интегральном представлении и использование её специфики позволяет на несколько порядков уменьшить объём вычислений. Это приводит к возможности решать задачи на сетках большого размера за малое время.

2.5. РЛС с синтезированной апертурой для реконструкции изображения поверхности Земли

2.5.1. Принципы синтезирования апертур для узкополосных импульсов зондирования

РЛС с синтезированной апертурой являются одним из перспективных направлений дистанционного исследования поверхности Земли с борта летательного аппарата. Применение волн радиодиапазона с длиной порядка 0.1 м позволяет вести наблюдения практически независимо от времени суток и состояния атмосферы.

Основной проблемой при использовании РЛС на борту летательного аппарата является проблема разрешающей способности. Большая удалённость носителя РЛС от исследуемого участка поверхности (в случае космических аппаратов дальность может составлять сотни километров), естественные ограничения на размеры (апертуру) антенны, установленной на борту летательного аппарата, достаточно большая длина волны зондирующего излучения – все эти факторы приводят к тому, что диаметр области взаимодействия излучения РЛС с исследуемой поверхностью является чрезвычайно большим – до нескольких километров. Для большинства приложений такой диаметр луча является неприемлемым с точки зрения разрешающей способности.

Повышение разрешающей способности РЛС возможно за счёт применения специализированной методики наблюдений, основанной на принципах синтезирования апертуры. Идеи синтезирования апертуры заключаются в когерентном зондировании поверхности Земли с помощью РЛС бокового обзора на протяжении достаточно большого участка траектории движения носителя РЛС и последующей реконструкции изображения исследуемой поверхности по совокупности данных, полученных с различных точек траектории [46–49].

Схема наблюдений и регистрации данных РЛС с синтезированной апертурой показана на рис. 2.8. На борту летательного аппарата, движущегося по прямолинейной траектории над картографируемой поверхностью Земли, установлена РЛС бокового обзора, жёстко связанная с носителем, которая излучает зондирующие сигналы $s(t)$ (как правило, импульсные). Зондирующее излучение, распространяясь, достигает исследуемой поверхности, взаимодействует с ней, отражается и поступает на приёмные устройства РЛС. Отражённые сигналы $u(t)$, прошедшие циклы усиления и

детектирования, регистрируются в качестве исходных данных. При этом специальная аппаратура, установленная на борту носителя, позволяет регистрировать как амплитуду, так и фазу отражённого сигнала.

Построим математическую модель процесса зондирования. Будем считать, что при отражении сигналов от исследуемой поверхности, их приёме на борту летательного аппарата, а также при усилении и детектировании выполняется принцип суперпозиции откликов от различных участков поверхности. Кроме того, будем использовать стандартное старт-стоповое приближение, т. е. предполагаем, что можно пренебречь изменением геометрических параметров системы «носитель – картографируемая поверхность» в течение цикла излучения-приёма.

Рассмотрим для простоты изложения плоскопараллельный случай движения носителя по прямой, параллельной поверхности Земли. Подобное приближение при незначительных искривлениях траектории носителя и рельефа местности вполне допустимо и приводит лишь к незначительным геометрическим искажениям реконструируемой поверхности. Однако для получения высокоточных изображений необходим и в ряде случаев возможен учёт априорной информации об искривлении траектории и рельефе поверхности Земли.

Свяжем с исследуемой областью поверхности Земли декартову систему координат OXYZ (рис. 2.8). Будем считать, что носитель РЛС движется по прямой на высоте H вдоль оси OX, т. е. точки траектории носителя РЛС имеют координаты (x, 0, H). На траектории носителя введём координату ξ, так что $\xi = x$. Для удобства дальнейшего изложения перейдём на поверхности Земли от координаты y к координате ρ по следующей формуле: $\rho = \sqrt{y^2 + H^2}$. Введённые координаты (x, ρ) на поверхности Земли называются азимутальной и наклонной дальностями.

Отражающие свойства поверхности Земли будем характеризовать с помощью коэффициента $g(x, \rho)$ так, что $g(x, \rho)dxd\rho$ – линейный коэффициент отражения радиоволн в направлении носителя РЛС от элементарной площадки $dxd\rho$ с координатами (x, ρ). При этом будем считать, что в рассматриваемом угловом диапазоне облучения точки (x, ρ) на поверхности Земли $g(x, \rho)$ не зависят от углов зондирования. Введённый коэффициент отражения $g(x, \rho)$ характеризует свойства исследуемой поверхности и сложным образом зависит как от микро- и макрорельефа поверхности, так и от характеристик отражающего материала. Функция

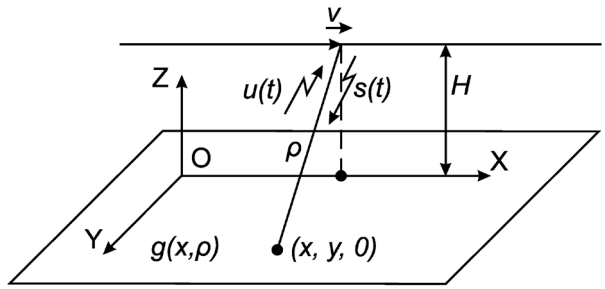


Рис. 2.8. Схема наблюдений и регистрации данных РЛС с синтезированной апертурой

$g(x,\rho)$ является искомой величиной в задачах построения изображений РЛС с синтезированной апертурой.

Обозначим через $s(t)$ излучаемый РЛС сигнал. В соответствии с принятой моделью сигнал $d\acute{u}(\xi(t),x,\rho)$, поступающий на приёмную антенну РЛС, имеющую координату $\xi(t)$ в момент времени t на траектории движения летательного аппарата, в результате отражения от площадки $dxd\rho$ с координатами (x,ρ) имеет вид

$$d\acute{u}(\xi(t),x,\rho)=s\left(t-\frac{2R(\xi(t),x,\rho)}{c}\right)P(\xi(t),x,\rho)g(x,\rho)dxd\rho, \quad (2.26)$$

где $R(\xi(t),x,\rho)$ – расстояние между носителем РЛС и точкой поверхности (x,ρ). Функция P учитывает эффекты диаграммы направленности антенны ($P(\xi(t),x,\rho)$ предполагается известной), задержка $\frac{2}{c}R(\xi(t),x,\rho)$ учитывает время прохождения сигнала от носителя до точки (x,ρ) и обратно, c – скорость распространения радиоволн.

В силу принципа суперпозиции полный сигнал $\acute{u}(\xi(t),x,\rho)$, действующий во входных цепях РЛС, есть интеграл от (2.26) по плоскости исследуемой поверхности (x,ρ) (реально влияние диаграммы направленности приводит к интегрированию по ограниченной области плоскости (x,ρ)):

$$\acute{u}(\xi(t))=\iint s\left(t-\frac{2R(\xi(t),x,\rho)}{c}\right)P(\xi(t),x,\rho)g(x,\rho)dxd\rho. \quad (2.27)$$

Полученное уравнение (2.27) описывает модель формирования отклика при облучении поверхности Земли сигналом $s(t)$.

Конкретизируем вид зондирующих сигналов. Будем считать, что периодически с периодом $2T_z$ излучаются импульсные сигналы в виде цуга высокочастотных колебаний конечной длительности частоты ω_0. В этом случае зондирующий сигнал имеет вид:

$$s(t) = s(t_j + \tau) = \begin{cases} \exp(-i\omega_0\tau) & |\tau| \le T \\ 0 & T < |\tau| \le T_z \end{cases},$$

где $t = t_j + \tau, \tau \in [-T_z, T_z]$; $t_j = 2T_z(j-1)$; $(t_j - T)$ – момент начала излучения j-го импульса, $j = 1, 2...$; $2T_z$ – период посылки импульсов; $2T$ – длительность импульса, ω_0 — несущая частота. В теории синтезирования апертуры t_j называются «медленным» временем. Параметр τ называется «быстрым» временем и характеризует наклонную дальность от носителя РЛС до точки на исследуемой поверхности. Можно показать, что $\tau = const$ соответствует отрезку прямой $y = const$.

Воспользуемся старт-стоповым приближением, предполагая, что за период $2T_z$ РЛС принимает отражённый сигнал, находясь в точке $\xi_j = \xi(t_j) = vt_j$ – координате носителя вдоль траектории, где v – скорость носителя РЛС. Перейдём к новым переменным ξ_j, t_j, τ, тогда уравнение (2.27) преобразуется к виду:

$$\acute{u}(\xi(t)) = \acute{u}(\xi(t_j + \tau)) = \acute{u}(\xi_j, \tau) =$$
$$= \iint s\left(t_j + \tau - \frac{2R(\xi_j, x, \rho)}{c}\right) P(\xi_j, x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho. \qquad (2.28)$$

Регистрируемый отклик, получаемый в результате детектирования $\hat{u}$, в рамках линейных моделей процессов усиления и детектирования с точностью до постоянных множителей можно представить в виде функции:

$$\hat{u}(\xi_j, \tau) = \iint\limits_{G(t_j, \tau)} \exp\left(i\omega_0 \frac{2R(\xi_j, x, \rho)}{c}\right) P(\xi_j, x, \rho) g(x, \rho) dx d\rho. \qquad (2.29)$$

Интегрирование производится по области $G(t_j, \tau)$ переменных (x, ρ), определяемой неравенством (размер области по ρ определяется длительностью импульса): $\left|\tau - \frac{1}{c}2R\left(\xi\left(t_j\right), x, \rho\right)\right| \le T$. Полученное уравнение представляет собой модель формирования регистрируемого отклика РЛС с синтезированной апертурой.

Используя принятые ранее предположения, разложим расстояние $R(\xi, x, \rho)$ в ряд Тейлора:

$$R(\xi, x, \rho) = \sqrt{\rho^2 + (x-\xi)^2} = \rho + \tfrac{1}{2}(x-\xi)^2\rho^{-1} - \tfrac{1}{8}(x-\xi)^4\rho^{-3} + \ldots \quad (2.30)$$

При характерных значениях параметров функционирования реальных систем [48] члены разложения (2.30) выше второго порядка по абсолютной по абсолютной величине много меньше длины волны излучения λ_0, поэтому при подстановке в уравнение (2.29) этими членами можно пренебречь. Тогда уравнение (2.29) преобразуется к виду (здесь и в дальнейшем для простоты обозначений индекс j опускаем):

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \iint \chi(\xi, \tau, x, \rho) P(\xi, x, \rho) \exp\left(i\frac{\omega_0}{c\rho}(x-\xi)^2\right) \times \\ \times \exp\left(i\frac{2\omega_0\rho}{c}\right) g(x, \rho) dx d\rho, \quad (2.31)$$

где $\chi(\xi, \tau, x, \rho)$ — характеристическая функция области $G(\xi, \tau)$, определяемой неравенством (2.29). Как следует из (2.29), область $G(\xi, \tau)$ имеет вид полоски, вытянутой вдоль координаты x и имеющей небольшой изгиб. При плоскопараллельном движении функции P и χ зависят от разности $(\xi - x)$.

Рассмотрим практически важный случай, когда соотношение между параметрами системы ($2T$ — длительностью импульса, $2L$ — характерным размером облучаемой области вдоль координаты x, определяемым диаграммой направленности антенны, расстоянием от носителя до облучаемой области) таковы, что с большой степенью точности произведение $\chi(\xi - x, \tau, \rho) P(\xi - x, \rho)$ приближается функцией

$$\chi(\xi - x, \tau, \rho) P(\xi - x, \rho) = \begin{cases} 1, \text{при } |\xi - x| \le L, \quad |\tau - 2\rho / c| < T \\ 0, \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Рассмотренное приближение предполагает, что с достаточной точностью можно перейти от интегрирования по вытянутой изогнутой области G, ограниченной диаграммой направленности антенны, к интегрированию по прямоугольнику (x,ρ): $|\xi - x| \le L$, $|\tau - 2\rho / c| \le T$. Тогда в формуле (2.31) перейдём от двойного интеграла к повторному. Повторный интеграл можно записать в виде

$$u(\xi,\tau) = \int_{\xi-L}^{\xi+L} \exp\left(\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}(x-\xi)^2\right) g'(x,\tau)dx, \qquad (2.32)$$

где введена сглаженная функция:

$$g'(x,\tau) = \int_{(\tau-T)c/2}^{(\tau+T)c/2} \exp\left(\frac{i2\omega_0\rho}{c}\right) g(x,\rho)d\rho. \qquad (2.33)$$

Функция $\exp(i2\omega_0(x-\xi)^2/(c\rho))$ вынесена из-под интеграла по $d\rho$, поскольку она слабо меняется в пределах интегрирования по ρ.

Таким образом, в рассматриваемом приближении математическая модель регистрации излучения в случае зондирования короткими импульсами описывается выражением (2.32), имеющим достаточно простой вид одномерной свёртки с ядром Френеля (на участке $(-L, L)$) по координате x при $-\infty < \xi < \infty$. Функция $g'(x, \tau)$ связана с $g(x, \rho)$, характеризующей отражающие свойства поверхности, соотношением (2.33).

В обратной задаче требуется по приближённо заданным радиолокационным данным $u(\xi, \tau)$ восстановить функцию $g'(x, \tau)$ (на самом деле интерес представляет лишь модуль $g'(x, \tau)$). Функция $g'(x, \tau)$ связана с функцией $g(x, \rho)$, характеризующей отражающие свойства поверхности Земли, соотношением (2.33), т. е. $g'(x, \tau)$ является функцией, сглаженной на период длительности импульса. При характерных значениях параметров реальной РЛС размер сглаживания составляет ~1м. Поэтому восстановление $g'(x, \tau)$ (а не $g(x, \rho)$) является вполне корректной заменой.

Уравнение (2.28) для импульсного режима зондирования в моменты времени t_j, опуская индекс j, имеет вид

$$\acute{u}(\xi,\tau) = \iint s\left(\tau - \frac{2R(\xi,x,\rho)}{c}\right) P(\xi,x,\rho)\, g(x,\rho)\, dx d\rho.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение с точностью до обозначений и весового множителя $P(\xi, x, \rho)$ совпадает с уравнением (2.20) в двумерном случае. $P(\xi, x, \rho)$ определяется диаграммой направленности антенны, которой мы пренебрегли при выводе уравнения (2.20). Множителем $\left(16\pi^2 |r' - r|^2\right)^{-1}$ в уравнении (2.20), связанным с затуханием расходящегося сигнала, в данном случае можно пренебречь в силу специфики параметров системы.

Таким образом, задача из предыдущего раздела 2.5 близка к задаче РЛС с синтезированной апертурой. Основные отличия состоят в том, что данная задача описывается в 2D для узкополосного импульса с некоторой диаграммой направленности, что определяет специфику методов решения.

Характерная особенность интегрального уравнения (2.32) состоит в том, что оно распадается на независимые одномерные интегральные уравнения для каждого τ. Как видно, при каждом τ необходимо решать одномерные интегральные уравнения 1 рода с ядром Френеля, носитель которого ограничен отрезком $(-L, L)$. При типичных параметрах РЛС на носителе ядра $(-L, L)$ помещается достаточно много зон Френеля ядра $\exp(i2\omega_0 (x-\xi)^2 / (c\rho))$ (до сотен зон), что позволяет получать высокое разрешение по x при обработке реальных данных.

Для приближённого нахождения $g'(x, \tau)$ можно воспользоваться следующим интегральным оператором («обратное преобразование Френеля» с конечными пределами интегрирования):

$$\tilde{g}(x,\tau) = \int_{-L}^{L} \exp\left(-\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}\xi^2\right) u(x-\xi,\tau)d\xi. \qquad (2.34)$$

Алгоритм (2.34) известен в литературе как алгоритм фокусированного синтеза [47, 48]. Как видно, алгоритм фокусированного синтеза имеет достаточно простой вид одномерной свёртки по координате ξ. При реализации алгоритма на компьютере можно использовать процедуру быстрого преобразования Фурье, что позволяет достигать высокой скорости вычислений.

При обработке реальных данных, полученных на РЛС с синтезированной апертурой, размеры зондируемой поверхности Земли могут составлять до нескольких десятков километров по азимутальной и наклонной

дальностям. Размер шага сетки на экспериментальных данных ~1 м. Это приводит к необходимости проведения огромного объёма вычислений (иногда в реальном времени). Однако специфика алгоритма решения обратной задачи такова, что расчёты можно проводить практически независимо для каждого значения наклонной дальности. Это позволяет эффективно распараллеливать вычисления, выделяя каждому процессу свой диапазон значений по наклонной дальности.

2.5.2. Результаты реконструкции реальных данных РЛС с синтезированной апертурой

На рис. 2.9 показаны результаты цифровой реконструкции изображения РЛС с синтезированием апертуры, установленной на космическом аппарате «Алмаз» [41]. На рис. 2.9 слева приведено исходное изображение – функция $u(\xi,\tau)$, полученная в результате зондирования поверхности Земли, на рис. 2.9 справа – результаты решения задачи методом фокусированного синтеза: фрагмент восстановленного изображения. Как видно из этого примера, применение разработанных методов позволяет получить разрешающую способность порядка 11–15 м.

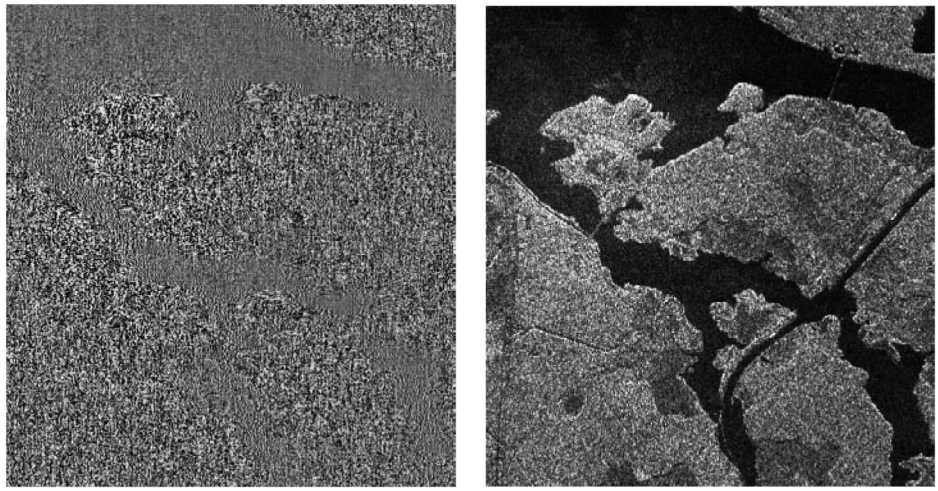


Рис. 2.9. Реконструкция поверхности Земли (окраины Москвы) по данным РЛС с синтезированной апертурой, установленной на космическом аппарате «Алмаз». Слева – исходные данные, справа – восстановленное изображение

Дальнейшее повышение разрешающей способности РЛС с синтезированной апертурой ставит задачу развития математических методов и моделей реконструкции изображений РЛС. Постановки задач в этом случае являются более сложными, поскольку модель включает в себя такие факторы, как криволинейная траектория движения носителя РЛС, эффекты рельефа зондирующей поверхности, искривление носителя ядра оператора и т. п.

2.6. Выводы

В настоящей главе рассмотрен интегральный подход, который базируется на использовании аппарата функции Грина. Обратные задачи в этом случае можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Фредгольма 1 рода. К достоинствам интегрального подхода можно отнести простую постановку обратной задачи, применимую в том числе для полубесконечной или бесконечной среды, включающей в себя неоднородность. Однако в интегральном представлении решение рассматриваемой трёхмерной нелинейной обратной задачи волновой томографии даже на современных суперкомпьютерах возможно только на крупных расчётных сетках в силу огромного объёма вычислений. Интегральный подход может быть применён только в случае простой структуры неоднородности (например, несколько небольших по размерам неоднородностей).

Естественным выходом для решения задач волновой томографии в интегральном представлении является линеаризация. Одними из таких задач, в которых используется линеаризованное приближение, являются задачи интерпретации данных РЛС с синтезированной апертурой. В этих задачах, как правило, среда, разделяющая источник и исследуемый объект, является однородной. При широком разнообразии задач с синтезированной апертурой их объединяет то, что в процессе зондирования исследуемого объекта источники и приёмники перемещаются вдоль некоторой прямой или плоскости, и когерентно регистрируется отражённый от объекта периодически излучаемый источником сигнал. Перемещаясь в пространстве, реальные приёмники с небольшой апертурой последовательно во времени формируют виртуальную апертуру больших размеров, что позволяет достигать высокого разрешения.

В зависимости от вида зондирующего импульса методы синтезированной апертуры различаются на узкополосные и широкополосные. Для

узкополосной СА, рассмотренной в разделе 2.5, характерен эффект фазовой модуляции принимаемого траекторного сигнала от отражающего объекта. Этот эффект определяет фазовые алгоритмы обработки данных, как, например, рассмотренный алгоритм фокусированного синтеза. Узкополосные СА обладают высоким разрешением в направлении перемещения приёмника (азимутальном направлении). Для широкополосной СА, рассмотренной в разделе 2.4, характерен эффект сдвига по времени принимаемого импульса, что связано с изменением дальности от приёмника до объекта вдоль траектории приёма. В результате отражённый от точечного объекта сигнал имеет вид параболы. Широкополосные СА обладают высоким разрешением и по азимуту, и по дальности.

Помимо рассмотренных приложений методы СА применяются в области ультразвукового неразрушающего контроля и дефектометрии [60], в медицине для визуализации внутренних органов с помощью ультразвука [50], для исследования дна водоёмов и т. п. [51, 61].

2.7. Задачи математического практикума к главе 2

Задача № 1. Реконструкция данных РЛС с синтезируемой апертурой

В задаче № 1 необходимо реконструировать изображения поверхности Земли по данным РЛС с синтезируемой апертурой. В модельной задаче используется схема бокового обзора для зондирования поверхности Земли электромагнитными импульсами, представленная на рис. 2.8. Экспериментальные данные записываются в виде двумерного массива по азимутальной и наклонной дальности.

Выполните следующие операции:

1. Составьте программу, которая задаёт коэффициенты отражения $g(x, r)$ участка поверхности Земли. Изображение фантома представлено на рис. 2.10. В РЛС с синтезированной апертурой электромагнитное излучение падает на исследуемую поверхность под углом (локаторы бокового обзора). Если поверхность воды идеально гладкая, то отражённое от поверхности излучение не попадает на приёмники, поэтому для идеальной водной поверхности $g(x, r) = 0$.

Коэффициенты отражения $g(x,r)$ задаются на сетке

$$\left\{(x_i, r_j) : x_i = ih, \quad 0 \le i < N; \quad r_j = jh, \quad 0 \le j < M;\right\}$$

($N = 1024$, $M = 200$) следующим образом:

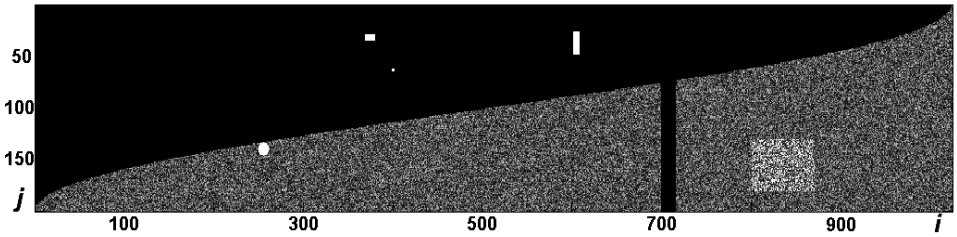


Рис. 2.10. Изображение фантома поверхности Земли

1.1. Область моря в левом верхнем углу задаётся неравенством

$$i \le 0.5\,N\left(\cos\frac{\pi j}{M}+1\right).$$

В области моря $g(x, r) = 0$.

1.2. Остальную часть фантома (правый нижний угол) занимает лес, где коэффициент отражения $g(x, r)$ равен случайному шуму, равномерно распределённому в диапазоне [0, 1].

1.3. На области моря располагаются корабли:

прямоугольники с координатами (i, j):

1.3.1. (602:608, 27:48), $g(x, r) = 2$;

1.3.2. (399:402, 63:65), $g(x, r) = 2.5$;

1.3.3. (370:380, 30:35), $g(x, r) = 2.5$.

1.4. На области леса располагаются:

1.4.1. Маяк – круг с координатами центра $(i, j) = (256, 140)$ и радиуса 6, $g(x, r) = 1.2$.

1.4.2 Река – прямоугольник с координатами (i, j) (700:715, 72:200), $g(x, r) = 0$.

1.4.3 Поле – прямоугольник с координатами (i, j) (801:870, 131:180), $g(x, r)$ равен случайному шуму, равномерно распределённому в диапазоне [0, 1.4].

2. Вычислите принятые РЛС экспериментальные данные $u(\xi, r)$. Для этого для каждой $r^* = r_j{}^*$ $(0 \le j < M)$ вычислите $u(\xi, r^*)$, которые задаются по формуле (2.32)

$$u(\xi, r^*) = \int_{\xi-L}^{\xi+L} \exp\left(\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}(x-\xi)^2\right) g(x, r^*)dx,$$

где для простоты считаем τ фиксированным.

Для вычисления $u(\xi, r^*)$ выполните следующие операции:

2.1. Вычислите образ Фурье $\tilde{G}(\omega, r^*)$ от функции $g(x, r^*)$.

2.2. Вычислите образ Фурье $\tilde{E}(\omega, r^*)$ от функции $\exp\left(\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}x^2\right)$.

2.3. Вычислите $\tilde{U}(\omega, r^*) = \tilde{G}(\omega, r^*)\tilde{E}(\omega, r^*)$.

2.4. Сделав обратное преобразование Фурье для $\tilde{U}(\omega, r^*)$, вычислите

$$u(\xi, r^*) = F^{-1}[\,\tilde{U}(\omega, r^*)].$$

В модельной задаче используйте следующие значения параметров: $\omega_0 = 2\pi\omega_1$, $\omega_1 = 3$ ГГц, $L = 440$ м, $\tau = 0.001$ сек, $c = 3\cdot 10^8$ *м / сек*, $dx = 3.455$ м. На рис. 2.11 для контроля приведена действительная часть функции $u(\xi, r)$ (ξ меняется по горизонтали, r – по вертикали) на сетке

$$\left\{(\xi_i, r_j) : \xi_i = ih, \quad 0 \le i < N; \quad r_j = jh, \quad 0 \le j < M\right\}.$$

3. Вычислите реконструированное изображение поверхности Земли $g(x, r)$. Для этого для каждой $r^* = r_j{}^*$ $(0 \le j < M)$ вычислите $g(x, r^*)$, которое находится по формуле (2.34)

$$g(x, r^*) = \int_{-L}^{L} \exp\left(-\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}\xi^2\right) u(x-\xi, r^*)d\xi,$$

где τ – фиксировано.

Для вычисления воспользуйтесь следующей процедурой:

3.1. Вычислите образ Фурье $\tilde{U}(\omega, r^*)$ от функции $u(\xi, r^*)$.

3.2. Вычислите образ Фурье $\tilde{E}(\omega, r^*)$ от функции $\exp\left(-\frac{i2\omega_0}{c^2\tau}\xi^2\right)$.

3.3. Вычислите $\tilde{G}(\omega, r^*) = \tilde{U}(\omega, r^*)\tilde{E}(\omega, r^*)$.

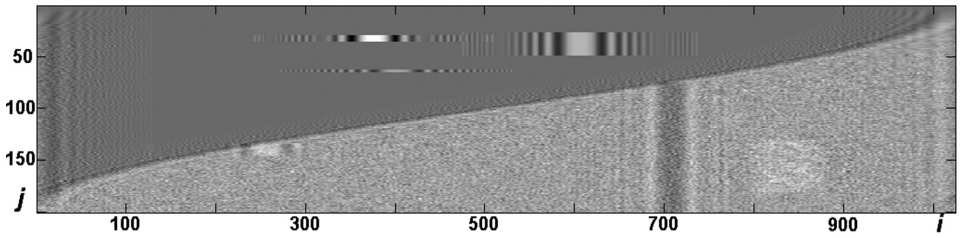


Рис. 2.11. Пример экспериментальных данных

3.4. Сделав обратное преобразование Фурье для $\tilde{G}(\omega, r^*)$, вычислите

$$g(x, r^*) = F^{-1}\left[\tilde{G}(\omega, r^*)\right].$$

Сравните модуль полученного $g(x, r)$ с фантомом на рис 2.10.

Задача № 2

Решите **Задачу № 1,** используя технологию MPI для процессоров общего назначения на 4 вычислительных ядрах. Для этого разбейте область расчётов на 4 равных полосы по координате *r*. Распараллельте вычисления по одному вычислительному ядру на каждую полосу. Сравните полученное время расчёта со временем расчёта на одном ядре персонального компьютера.

Глава 3

Обратные задачи 2D волновой томографии как коэффициентные задачи для уравнения в частных производных гиперболического типа в моделях без поглощения

3.1. Введение

В главе 3 рассмотрена задача волновой томографии как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в рамках дифференциального подхода, приведены постановка задачи, эффективные методы и алгоритмы решения в двумерном случае. Рассматриваемый в этой главе дифференциальный подход применяется к той же задаче, что и интегральный подход, рассмотренный в предыдущей главе. Разница состоит только в методах решения. Поэтому теоретически результаты решения обратных задач должны полностью совпадать. Однако дифференциальный подход обладает одним очень важным преимуществом – гораздо меньшим объёмом вычислений, который на 4–5 порядков ниже объёма вычислений в интегральном подходе. В результате, если в интегральном подходе задачи на больших расчётных сетках можно решать только в линеаризованной постановке, то в дифференциальном подходе использование суперкомпьютеров позволяет решать задачи не только в двумерной, но и в трёхмерной нелинейной постановке.

Этот прорывный результат в области решения коэффициентных обратных задач волновой томографии в дифференциальном подходе связан, прежде всего, с возможностью выписать точное выражение для градиента функционала невязки через решение прямой и сопряжённой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Умея вычислять градиент функционала невязки, можно строить эффективные итерационные алгоритмы приближённого решения.

Традиционным томографическим методом исследования трёхмерных объектов в волновой томографии является послойная (2.5D) схема, в которой решаются двумерные обратные задачи реконструкции двумерных

сечений 3D объекта. Этим объясняется интерес к решению обратных задач волновой томографии в двумерном случае. К сожалению, в послойной схеме в рамках одного двумерного слоя невозможно полностью учесть трёхмерные эффекты рефракции, дифракции, переотражения. В послойной модели наличие волновых эффектов может искажать форму неоднородности, приводить к артефактам. Возникает вопрос – с чем связана такая популярность послойной схемы восстановления структуры трёхмерных объектов?

Дело в том, что решение трёхмерных задач как коэффициентных обратных задач – намного более сложная проблема, чем решение двумерных обратных задач в послойной модели. Для обеспечения высокого разрешения необходимо решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке (не менее 400 точек сетки по каждой из координат). Достаточно отметить, что количество неизвестных непосредственно в 3D схеме в этом случае превышает 10^8, а количество точек расчётной сетки – 10^{11}. С таким количеством неизвестных нужно решить сложную нелинейную обратную задачу. Вопросы решения обратных задач непосредственно в 3D схеме будут рассмотрены в главе 5.

Одна из целей настоящей книги состоит в демонстрации того, что все возникающие трудности на пути численной реализации алгоритмов в задачах волновой томографии можно преодолеть, в том числе с помощью использования суперкомпьютерных технологий. В настоящей главе будут подробно описаны методы и алгоритмы решения, ориентированные на использование современных суперкомпьютеров с процессорами общего назначения. Рассмотрены вопросы распараллеливания вычислений, оптимизации алгоритмов, масштабируемости программы для десятков тысяч вычислительных ядер. Приведены результаты полноценных модельных расчётов в послойной схеме волновой томографии.

3.2. Постановка обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных гиперболического типа

Рассмотрим задачу во временной области. Будем считать, что поле $u(r, t)$ в области пространства $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с границей S в течение времени (0, T) с точечным источником, располагающимся в точке r_0, удовлетворяет волновому уравнению со следующими начально-краевыми условиями:

$$c(r)u_{tt}(r,t)-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t), \tag{3.1}$$

$$u(r,t=0)=u_t(r,t=0)=0, \tag{3.2}$$

$$\partial_n u|_{ST}=p(r,t). \tag{3.3}$$

Здесь $c^{-0.5}(r)$ – скорость распространения излучения, $\partial_n u|_{ST}$ – производная вдоль нормали к поверхности S в области $S\times(0,T)$, $\delta(r-q)\cdot f(t)$ описывает возмущение среды точечным источником, располагающимся в точке $q\in\mathbf{R}^2$, Δ – оператор Лапласа. Будем предполагать, что неоднородность среды вызвана только изменениями скорости распространения волн, а вне области неоднородности $c(r)\equiv const$, где $const$ – известна, $p(r,t)$ – некоторая известная функция.

Волновое уравнение (3.1) эффективно описывает волновые эффекты. Эта модель является простейшей, но даже в этой модели решение обратных задач волновой томографии связано с необходимостью решения нелинейных некорректно поставленных задач. Обратная задача состоит в нахождении функции $c(r)$, описывающей неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,t)$ на границе S области за время $(0,T)$ при различных положениях r_0 источника. Функция $p(r,t)$ при решении обратной задачи может быть найдена по экспериментальным данным $U(s,t)$ на границе S из решения внешней для области Ω задачи. Более подробно этот вопрос обсуждается в параграфе 5.4.

Обратная задача ставится как задача минимизации по $c(r)$ квадратичного функционала невязки

$$\Phi(u(c))=\frac{1}{2}\left\|u|_{ST}-U\right\|^2=\frac{1}{2}\int_0^T\int_S\left(u(s,t)-U(s,t)\right)^2 ds\,dt. \tag{3.4}$$

Здесь $\|\cdot\|^2$ — квадрат нормы в пространстве $\mathbf{L}_2(S\times(0,T))$.

Рассматриваемая обратная задача является некорректной, поэтому в функционал (3.4) можно добавить регуляризирующий член, а можно и не делать этого, поскольку используемые для решения итерационные методы в определённом смысле сами обладают регуляризирующими свойствами [10].

Рис. 3.1 иллюстрирует схему расположения источников и приёмников в двумерной задаче томографии. Цифрой 1 обозначены источники

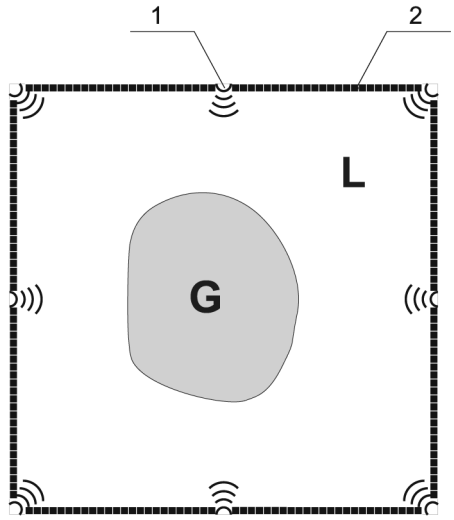


Рис. 3.1. Схема эксперимента в 2D задаче

излучения, приёмники излучения обозначены цифрой 2 и расположены на сторонах квадрата Ω. Исследуемый объект G расположен внутри квадрата Ω. Остальное пространство L заполнено однородной средой с известной скоростью v_0.

3.3. Вывод выражения для градиента функционала невязки

Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы. Прорывные результаты в области решения задач ультразвуковой томографии связаны с возможностью вычисления градиента функционала $\Phi(u(c))$. В разных постановках выражение для градиента функционала $\Phi(u(c))$ получено в работах [15, 23–25, 35, 62]. Следуя работе [35], выпишем выражение для градиента функционала $\Phi(u(c))$ для приведённой выше «time domain» постановки.

Найдём линейную относительно произвольной вариации dc часть приращения функционала (3.4):

$$d\Phi'(u(c)) = \int_{ST} \left(u - U\right)(u_c dc) ds dt. \qquad (3.5)$$

Здесь u_c – производная по Фреше. Поскольку $u(r,t)$ является решением задачи (3.1)–(3.3) при некотором $c(r)$ (т. е. $u(r,t)$ есть неявная функция от $c(r)$), то, взяв полную производную по $c(r)$ в (3.1), имеем

$$c(r)(u_c dc)_{tt} - \Delta(u_c dc) + u_{tt}(r,t)dc = 0. \tag{3.6}$$

Кроме того, вводя линейный оператор P ограничения функции на область $t=0$, из (3.2) имеем, что $u(r,t=0) \equiv P(u(r,t)) = 0 = const$. Дифференцируя по $c(r)$, получим $\left(P(u(r,t))\right)'_c dc = P(u_c dc) = (u_c dc)(r,t=0) = 0$. Аналогично из (3.2) и (3.3) получаем, что

$$(u_c dc)(r,t=0) = (u_c dc)_t(r,t=0) = 0\,, \tag{3.7}$$

$$\partial_n (u_c dc)|_{ST} = 0\,. \tag{3.8}$$

Таким образом, функция $(u_c dc)(r,t)$ при любой вариации dc является решением задачи (3.6)–(3.8). Введём оператор A: $Au = c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t)$.

Рассмотрим задачу, которую назовём «сопряжённой» к основной задаче (3.1)–(3.3):

$$Bw = c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t) = 0, \tag{3.9}$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \tag{3.10}$$

$$\partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U, \tag{3.11}$$

где u – решение основной задачи (3.1)–(3.3). Обозначим $(u_c dc)(r,t) = \tilde{u}(r,t)$ для некоторой вариации dc. Рассмотрим скалярное произведение $\left(Bw, \tilde{u}\right)$. Используя соотношения (3.7), (3.10) и (3.11), получим

$$0 = \left(Bw, \tilde{u}\right) = \int\limits_{\Omega T} (Bw)\tilde{u}drdt = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_{tt}(r,t)\tilde{u}(r,t)dtdr - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \Delta w(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{S} \partial_n w(s,t)\tilde{u}(s,t)dsdt + \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \int\limits_{ST} (u(s,t) - U(s,t))\tilde{u}(s,t)dsdt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{ST}(u(s,t)-U(s,t))\tilde{u}(s,t)dsdt=$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt. \tag{3.12}$$

Далее, рассмотрим скалярное произведение $\left(w, A\tilde{u}\right)$. Используя соотношения (3.2), (3.6) и (3.10), получим

$$\left(w, A\tilde{u}\right)=\int\limits_{\Omega T}w(r,t)A(\tilde{u}(r,t))drdt=$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w(r,t)u_{tt}(r,t)dc(r)dtdr=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)dtdr. \tag{3.13}$$

С другой стороны, используя соотношения (3.7), (3.8) и (3.10), имеем

$$(w, A\tilde{u})=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w(r,t)c(r)\tilde{u}_{tt}(r,t)dtdr-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}w(r,t)\Delta\tilde{u}(r,t)drdt=$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{S}w(s,t)\partial_n\tilde{u}(s,t)dsdt+$$
$$+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt= \tag{3.14}$$
$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Из (3.13) и (3.14) получаем

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)dtdr=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+$$
$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt. \tag{3.15}$$

Тогда из (3.5), (3.12) и (3.15) имеем

$$d\Phi'(u(c))=\int\limits_{ST}\left(u-U\right)(u_c dc)dsdt=\int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dt\right]dc(r)dr.$$

Выделяя линейную часть по вариации dc, окончательно для градиента функционала $\Phi(u(c))$ имеем

$$\Phi'_c(u(c)) = \int_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dt. \qquad (3.16)$$

Здесь $u(r,t)$ есть решение основной задачи (3.1)–(3.3), а $w(r,t)$ – решение «сопряжённой» задачи (3.9)–(3.11) при заданном $c(r)$. Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и «сопряжённую» задачи. Зная Φ'_c из (3.16), можно построить различные итеративные схемы для градиентной минимизации функционала невязки (3.4).

3.4. Итерационные методы решения обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных гиперболического типа

Опишем численные методы в двумерной обратной задаче волновой томографии. Будем считать, что процесс распространения ультразвуковой волны описывается уравнением (3.1) в $\mathbf{R}^2$, так что $r = (x, y)$. Для решения обратной задачи будем использовать метод конечных разностей во временно́й области. В такой постановке решение волновых дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введём равномерную дискретную сетку

$$v_{ijk} = \left\{(x_i, y_j, t_k) : x_i = ih, 0 \le i < n; y_j = jh, 0 \le j < n; t_k = k\tau, 0 \le k < m\right\},$$

где h – шаг сетки по пространственным переменным, τ – шаг сетки по времени. Используем следующие аппроксимации второго порядка точности для производных 2-го порядка в уравнении (3.1):

$$u_{tt}(r,t) = \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^k + u_{ij}^{k-1}}{\tau^2}, \quad u_{xx}(r,t) = \frac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2}.$$

Аналогичная разностная схема используется для $u_{yy}(\boldsymbol{r}, t)$. В области, не содержащей источников, получаем явную разностную схему для дифференциального уравнения (3.1) для расчёта распространения звуковой волны последовательно по временным слоям (расчёт «в прямом времени»):

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{c_{ij}} \tau^2 \Delta u_{ij}^k + 2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1}, \tag{3.17}$$

где $\Delta u_{ij}^k = \dfrac{u_{i+1j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1j}^k}{h^2} + \dfrac{u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k}{h^2}$ – двумерный дискретный лапласиан в точке (i, j) в момент времени k в 2D, u_{ij}^k – значения $u(r, t)$ в точке (i, j) в момент времени k, c_{ij} – значения $c(r)$ в точке (i, j). Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau < h/\sqrt{2}$ [63]. В расчётах мы использовали шаг по времени, равный $\tau = 0.3 c_0^{0.5} h$, что обеспечило стабильность расчётов. Здесь $c_0^{-0.5}(r)$ — скорость волны в окружающей однородной среде. Время T выбирается достаточно большим – так, чтобы все основные отражения и переотражения от исследуемого объекта успевали дойти до приёмников.

В качестве граничных условий для модельных расчётов выбиралось приближённое условие неотражения на границе [64]

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5} \partial_t u|_{ST}.$$

Расчёт сопряжённой задачи (3.9)–(3.11) для w выполняется по аналогичным разностным формулам. Решение находится по временным слоям из явной разностной схемы. Условие (3.11) сопряжённой задачи в разностной аппроксимации, например на участке $y = y_n$ границы S квадратной области $\Omega \subset R^2$, записывается в виде:

$$\frac{w_{ij+1}^k - w_{ij-1}^k}{2h} = u_{ij}^k - U_{ij}^k.$$

Градиент (3.16) функционала (3.4) вычислялся по разностной формуле

$$(grad\ \Phi)_{ij} = \sum_{k=0}^{m} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^k}{\tau} \tau. \tag{3.18}$$

Невязка для одного положения источника вычислялась по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2qm} \sum_{\substack{i,j \in S \\ k=0\ldots m-1}} (u_{ij}^k - U_{ij}^k)^2, \tag{3.19}$$

где U_{ij}^k – данные, используемые в качестве экспериментальных для решения обратной задачи; u_{ij}^k – значения u, полученные при решении прямой задачи в тех точках границы S, где расположены детекторы, q – количество детекторов, m – число шагов по времени.

В модельных расчётах исследуемая область окружена однородной средой, в которой процесс распространения зондирующего импульса хорошо известен, что позволяет вычислить $u(r, t)$ и $u_t(r, t)$ при малом t. Зондирующий импульс задаётся в некоторый момент времени $t_1 > 0$ в виде центрально-симметрично распространяющейся волны в среде L по формуле

$$\begin{cases} u(r,t_1) = -\exp(\alpha(r-R_0))\sin\left(\dfrac{4\pi(r-R_0)}{v_0\Theta}\right), \text{ при } R_0 - v_0\Theta < r < R_0 \\ u(r) = 0, \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}, \tag{3.20}$$

где r – расстояние от текущей точки до источника импульса, Θ – длительность импульса по времени, v_0 – скорость распространения волны в среде L, R_0 – расстояние от переднего фронта волны до источника импульса, $\alpha > 0$ – параметр.

На рис. 3.2 приведён график зондирующего импульса со следующими значениями параметров: $\alpha = 400.4$, R_0 = 0.01 м, v_0 = 1500 м/с; Θ = 0.00000666 с.

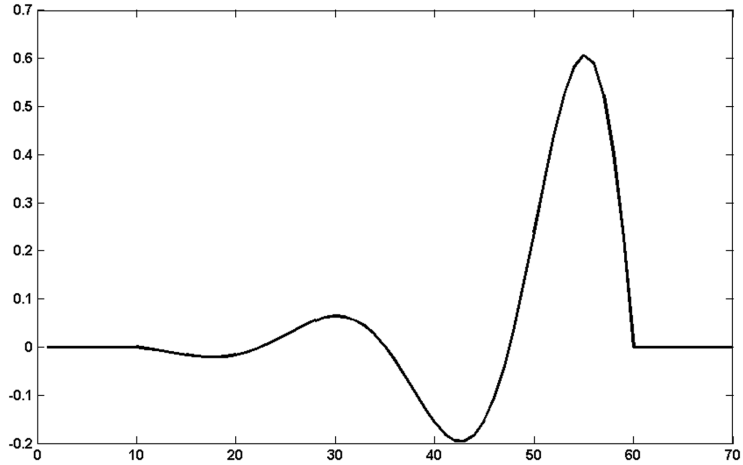


Рис 3.2. График зондирующего импульса

Функция $u(r, t_1)$ имеет компактный носитель, размер которого приблизительно равен двум длинам волн. Реальные источники сигналов характеризуются разными сигналами $u(r, t_1)$. Вид сигнала зависит от материалов источников, их конструкции, электрического сигнала, который на них подаётся. В рамках определённых моделей можно рассчитать электрический сигнал, который необходимо сгенерировать и подать на источник для того, чтобы получить нужный начальный импульс $u(r, t_1)$. Характерной особенностью всех импульсов $u(r, t_1)$ является наличие некоторых переколебаний, как на рис. 3.2. Чем меньше переколебания, тем, как правило, лучше. В идеализированном варианте переколебания отсутствуют.

Вычислительный эксперимент состоял в решении прямой задачи по определению акустического давления $u|_{ST}$ на границе расчётной области S, где расположены детекторы, при известном распределении скорости звука $v(\boldsymbol{r}) = c^{-0.5}(\boldsymbol{r})$, и затем использовании полученных данных $u|_{ST}$ для решения обратной задачи по восстановлению распределения скорости $v(\boldsymbol{r})$.

Для решения обратной задачи был использован следующий итерационный процесс минимизации функционала невязки (3.4). В качестве начального приближения выбирается значение $c^{(0)} = c_0 = \text{const}$. На каждой итерации ($m$) выполняются следующие действия:

1. Расчёт начального импульса источника по формуле (3.20).

2. Решение прямой задачи (3.1)–(3.3) для текущего итерационного приближения $c^{(m)}$. Расчёт распространения ультразвуковой волны $u^{(m)}(\boldsymbol{r}, t)$ выполняется по формуле (3.17). Вычисляются значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ на каждом из детекторов.

3. Вычисление невязки $\Phi^{(m)} = \Phi(u^{(m)}(r))$ из формулы (3.19).

4. Решение сопряжённой задачи (3.9)–(3.11) для $w^{(m)}(r, t)$.

5. Вычисление градиента $\Phi'_c(u^{(m)}(r))$ по формуле (3.18) для всех источников.

6. Коррекция текущего приближения $c^{(m+1)} = c^{(m)} + \lambda^{(m)} \Phi'_c(u^{(m)}(r))$. Процесс возвращается к пункту 2.

Начальный шаг метода градиентного спуска $\lambda^{(0)}$ выбирается из априорных соображений. Если невязка $\Phi^{(m+1)}$ на следующей итерации оказывается больше, чем $\Phi^{(m)}$, то шаг $\lambda^{(m)}$ уменьшается в 1.5 раза. Для более точного определения шага метода наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчётов вдвое и более.

Обратные задачи волновой томографии являются некорректными. Роль параметра регуляризации в итерационном процессе играет количество

итераций. Согласно теории итеративной регуляризации, в качестве приближённого решения обратной задачи с погрешностью входных данных δ можно взять элемент $c^{(m(\delta))}$ итерационной последовательности $c^{(m)}$, где $m(\delta)$ представляет собой первый номер, для которого выполнено неравенство $\Phi^{(m(\delta))} \leqslant b\,\delta^2$. Здесь b – фиксированное число, большее 1. Можно показать [65], что для широкого круга некорректных задач градиентные методы итеративной регуляризации позволяют строить приближённое решение $c^{(m(\delta))}$, которое при $\delta \to 0$ стремится к точному решению задачи. В модельных расчётах параметр b выбирался равным 1.1.

Рассмотренный в настоящей главе дифференциальный подход имеет существенное преимущество в объёмах вычислений по сравнению с интегральным подходом, рассмотренным в главе 2. Особенно это преимущество проявляется в трёхмерном случае, изложенном в главе 5. Использование явных разностных схем в дифференциальном подходе в трёхмерном случае приводит к необходимости выполнить порядка $O(n^3\tau)$ операций типа сложения-умножения для вычисления одной итерации метода градиентного спуска, где τ – количество точек сетки по времени. В то же время объём вычислений задачи в интегральном подходе растёт как n^9 (где n – размер сетки по одной координате). Поэтому, если решение в интегральном подходе является непосильной задачей даже для современных суперкомпьютеров, то использование дифференциального подхода позволяет решать реальные задачи за разумное время.

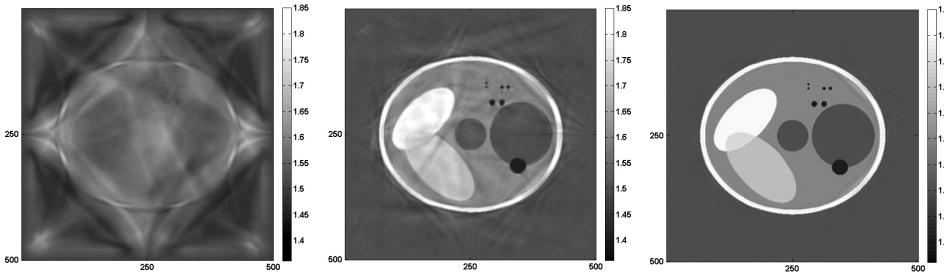
3.5. Примеры модельных расчётов задач волновой томографии в послойной схеме

При проведении расчётов томографическая схема и основные значения параметров выбирались в первую очередь с целью моделирования в задаче ультразвуковой томографии молочной железы. Для расчётов использовалась математическая модель, описываемая уравнением (3.1). На рис. 3.1 приведена схема эксперимента, источники обозначены цифрой 1, приёмники – 2. 8 источников расположены в серединах сторон и в углах квадрата области расчётов, приёмники излучения расположены по периметру области расчётов. Исследуемая область G, содержащая неоднородности, расположена в центре квадрата расчётной области и окружена средой L с известной скоростью v_0.

Использование суперкомпьютера позволило эффективно провести численные решения обратной задачи для реальных параметров ультразвуковой томографии молочной железы. Спецификой рассматриваемых задач ультразвуковой томографии является то, что ультразвуковые характеристики молочной железы мало отличаются друг от друга как для здоровых, так и для поражённых раком тканей. Скорость распространения звука в воде составляет $c_0 = 1500$ м/сек, в то время как скорость распространения звука в человеческих тканях отличается от c_0 не более чем на 10 % (примерная скорость распространения звука в жировой ткани равна 1450 м/сек, в мышечной ткани равна 1570 м/сек. Скорость распространения звука в поражённых раком тканях 1530–1630 м/сек [20, 66]. Как видно, скорость звука в злокачественных образованиях отличается от $c_0 = 1500$ м/сек не более чем на 10–15 %.

Таким образом, необходимо восстанавливать скоростной разрез при очень малом контрасте. Это накладывает жёсткие требования на алгоритмы реконструкции томографических изображений.

Как один из примеров, приведём результаты расчёта для 8 источников в двумерной задаче. На рис. 3.3, *а–в* изображены результаты расчётов модельной задачи, которая решалась без внесения дополнительной погрешности, полученные соответственно на 10, 170 и 500 итерациях. Вариация скорости $v(r)$ в модельной задаче не превышала 10 %. Точное решение задачи совпадает с рис. 3.4, *а*. Центральная длина волны излучения $\lambda = 5$ мм. Минимальный размер неоднородности составлял около 2 мм при размере области неоднородности порядка 15 см. Модельные расчёты проводились на области размера 20 см, на сетке 500×500 точек. Расстояние между приёмниками составляло $\sim\lambda / 2$.



а *б* *в*

Рис. 3.3. *а–в*. Результаты модельных расчётов:
а – 10 итераций; *б* – 170 итераций; *в* – 500 итераций

Как видно из рисунков 3.3, *а–в*, приближённое решение на первых 10 итерациях очень далеко от точного решения. Приближённое решение на 170 итерации уже восстанавливает форму неоднородности. Хорошо видны артефакты как внутри исследуемой области, так и вне её. Тем не менее рисунок демонстрирует достаточно хорошее разрешение даже маленьких объектов размером 2 мм. Решение на 500 итерации хорошо восстанавливает не только форму неоднородности, но и абсолютное значение скорости. Артефакты практически отсутствуют.

В таблице 3.1 приведены значения функционала невязки для 10, 170 и 500 итераций соответственно.

Таблица 3.1

Значения функционала невязки

Число итераций	10	170	500
Функционал невязки	$3.66 \cdot 10^{-4}$	$4.19 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$

Модельные расчёты, приведённые выше, проводились на сетке 500×500 точек. Такое количество точек сетки обеспечивает погрешность аппроксимации, вполне достаточную для решения задач с погрешностью экспериментальных данных в несколько процентов. Время расчётов для 500 итераций на 64 вычислительных ядрах суперкомпьютера «Ломоносов» МГУ составило около 20 мин.

Как отмечалось выше, в обратных задачах волновой томографии возможны две томографические схемы исследования внутренней структуры 3D объектов. В первом варианте используется послойная схема (так называемая схема 2.5D), в которой решаются двумерные обратные задачи на последовательности двумерных сечений 3D объекта, при этом источники и приёмники располагаются последовательно в этих сечениях. Во втором варианте источники и приёмники расположены на некоторой поверхности, окружающей объект, и решается трёхмерная обратная задача (так называемая схема 3D).

Томографическая 2.5D схема для 3D объектов является традиционной, например в рентгеновской томографии. В волновой томографии с использованием, например, УЗ излучения волновые эффекты являются значимыми, и решение задачи по слоям не совсем корректно. Тем не

менее большая часть работ по разработке алгоритмов решения обратных задач УЗ томографии делается в послойной 2.5D схеме, поскольку такой подход значительно проще. В главе 5 будет рассмотрен вопрос о применимости послойных 2.5D схем для решения трёхмерных задач волновой томографии.

Ниже будут приведены результаты расчётов в послойной 2.5D схеме решения трёхмерных задач волновой томографии. Эти расчёты были нацелены на исследование предельных характеристик ультразвуковой томографии по разрешающей способности. Поэтому модельные задачи решались на мелкой сетке 1000×1000 по x, y в квадрате 20×20 см с целью уменьшения погрешности вычислений в рамках заданной модели. Сетка по t диктуется условием устойчивости Куранта и составляет около 3000 точек в промежутке от 0 до T. Выбор такой мелкой сетки связан с тем, что для решения прямой и сопряжённой задачи используется явная разностная схема. Начальный импульс, распространяясь в пространстве, в модельных задачах аппроксимируется на 25 точках сетки по координатам x и y соответственно, чтобы обеспечить хорошую аппроксимацию для численного вычисления лапласиана.

Одной из задач численного эксперимента было исследование возможностей суперкомпьютера для одновременного расчёта большого количества сечений 2.5D схемы, что реально необходимо на ультразвуковых томографических установках. Для этих целей экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 3D объекте с модельными неоднородностями размером до 150 мм. Минимальный размер неоднородности 2 мм. Размер области ультразвукового зондирования по горизонтали 200×200 мм, по вертикали 200 мм. Расстояние между сечениями в данной модельной задаче по оси z принималось равным 5 мм. Расчёты проводились одновременно на 40 сечениях.

Разрешение по x, y и по z в реальных ультразвуковых томографических установках хотелось бы иметь одинаковым, порядка 2–3 мм или ещё меньше. Возможность уменьшения расстояния между сечениями по z в ультразвуковой томографии, в отличие от X-ray томографии, упирается в то, что сечения по оси z должны быть независимыми. Толщина сечений, при которой их можно считать независимыми, определяется прежде всего дифракционными эффектами и эффектом рефракции, переотражения и т. п. Вопрос о возможности восстановления в ультразвуковой томографии

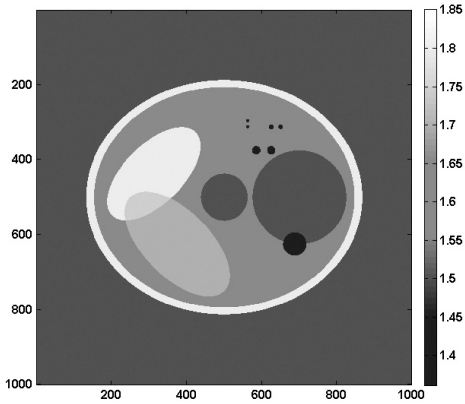
независимых сечений на расстоянии 2–3 мм друг от друга в реальных экспериментах более подробно обсуждается в главе 5.

Вариация скорости $v(x, y, z)$ в модельной задаче не превышала 10 %. Модельные расчёты проводились для центральной длины волны излучения 5.0 мм; количество источников в каждом сечении – 8. Расстояние между детекторами составляло 2.4 мм. Все расчёты проводились с начального приближения скорости $v_0 = const$.

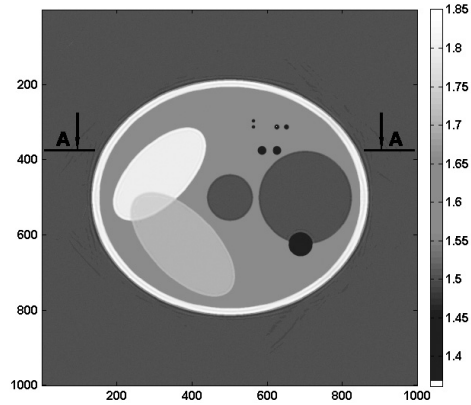
В ходе модельных экспериментов по восстановлению 3D неоднородности в послойной 2.5D схеме решалась двумерная прямая задача распространения ультразвуковой волны независимо в каждом двумерном сечении. Дополнительная ошибка в экспериментальные данные не вносилась. По полученным данным решалась обратная задача восстановления функции $c(x, y, z)$ при каждом фиксированном $z = z_i$ ($i = 1, \ldots 40$) на 20480 ядрах суперкомпьютера «Ломоносов» МГУ. На рис. 3.4–3.7 из-за ограничений по объёму приведены результаты реконструкции только каждого 10-го сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны в исследуемом объекте как функции от x, y при фиксированном $z = z_i$.

На рис. 3.4–3.7 слева приведены сечения фантома. Справа – результаты восстановленных изображений. Рисунки снабжены шкалой значений цвета функции скорости. На рис. 3.8 приведено сечение скорости распространения волны в неоднородности как функция от координаты x. Пунктир соответствует точному решению. Разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать не только форму неоднородности, но и с высокой точностью само значение скорости как функции от координаты. Видно также, что достаточно хорошо восстанавливаются даже небольшие неоднородности размером 2–5 мм. На рис. 3.8 отчётливо виден эффект «звона» восстановленного решения в местах «скачка» точного решения задачи. Эти эффекты вызваны волновым характером источников ультразвукового излучения, в частности наличием переколебаний зондирующего импульса (рис. 3.2).

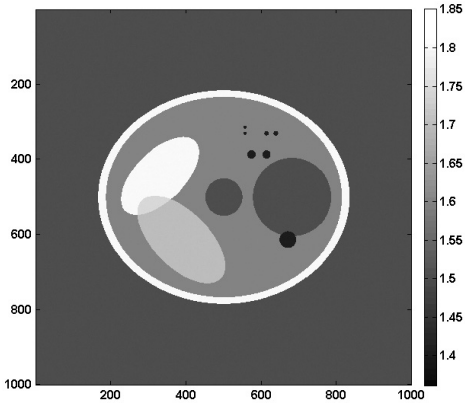
Приведём некоторые данные из модельных расчётов, которые характеризуют возможности суперкомпьютеров по сравнению с однопроцессорными компьютерами. Метод наискорейшего спуска обеспечивает монотонное убывание функционала невязки. Как обычно в задачах минимизации, функционал невязки вначале убывает достаточно быстро, а при больших итерациях приближается к погрешности и практически



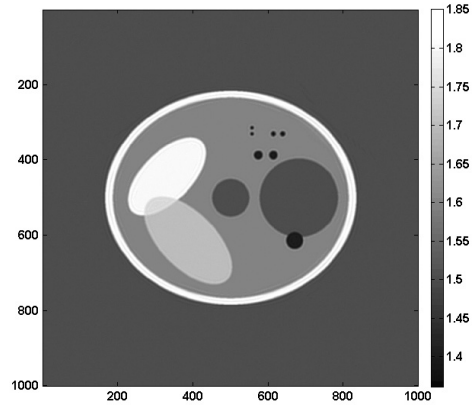
3.4, *а*



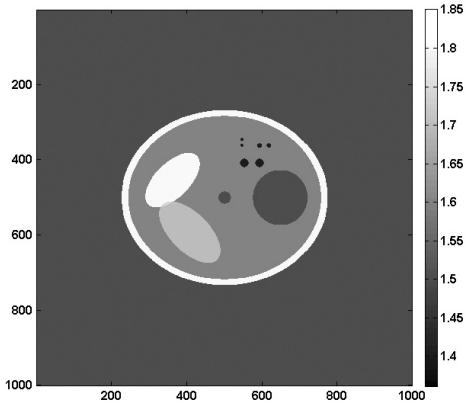
3.4, *б*



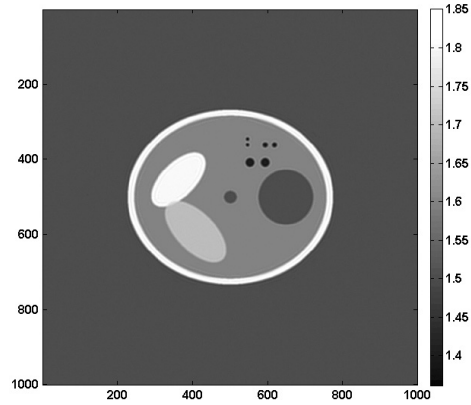
3.5, *а*



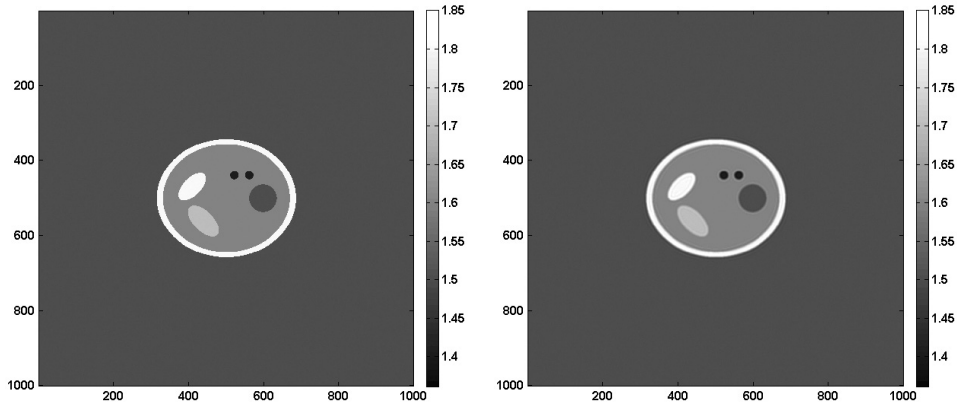
3.5, *б*



3.6, *а*

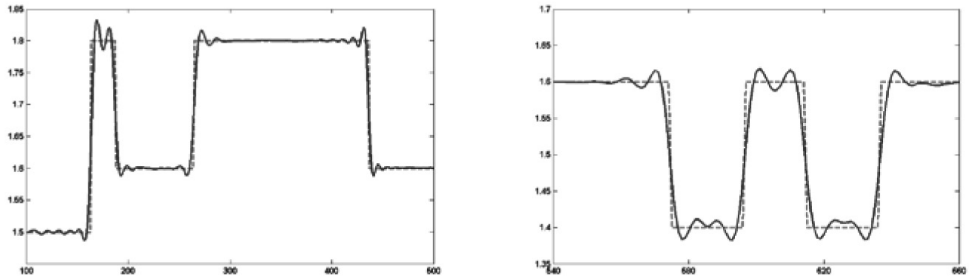


3.6, *б*



3.7, *а* 3.7, *б*

Рис. 3.4–3.7 (*а, б*). Слева – модельные сечения 3D объекта, справа – восстановленные сечения 3D объекта



а *б*

Рис. 3.8, *а, б*. Графики сечения вдоль линии АА на рис. 3.3, *б*:
а – на участке от 100 до 500 пиксела, *б* – на участке от 540 до 660 пиксела

не убывает. При модельных расчётах в обратной задаче без внесения дополнительной погрешности в экспериментальные данные значение функционала невязки удалось уменьшить в 10000 раз за 700 итераций за время около 4 часов на 20480 ядрах суперкомпьютера «Ломоносов». Этот результат был получен лишь для демонстрации предельных возможностей суперкомпьютера при решении задач ультразвуковой томографии с очень малой погрешностью.

Реальные задачи можно решать на сетке 500×500 точек с количеством итераций порядка 300–400. Использование 2560 вычислительных

ядер суперкомпьютера позволяет в этом случае проводить расчёты на 40 слоях за время ~15 мин. Выигрыш по времени при этом по сравнению с однопроцессорным вариантом составляет более чем 1000 раз. Более подробно проблемы применения суперкомпьютерных технологий в задачах волновой томографии будут рассмотрены в главах 5–6.

Важным параметром волновой томографии является длина волны излучения. Выбранная длина волны для модельных расчётов, равная 5 мм, превышает длины волн, используемые в обычных ультразвуковых исследованиях. Этот выбор обусловлен тем, что в задачах томографии необходимо получать сигнал на детекторах с высокой точностью. Ультразвуковое излучение в мягких тканях поглощается, причём поглощение сильно зависит от частоты или, что то же самое, от длины волны. Уменьшение длины волны, с одной стороны, увеличивает разрешение, а с другой стороны, из-за поглощения уменьшает соотношение сигнал-шум, что работает в обратную сторону. Выбранный диапазон порядка 5 мм, как показали модельные расчёты, обеспечивает при малой ошибке входных данных восстановление деталей сечения, размеры которых не превосходят 2 мм. В реальности зондирующий импульс, приведённый на рис. 3.2, содержит широкий спектр частот, в том числе и более высоких.

Остановимся ещё на одной причине, по которой важным фактором при решении задач ультразвуковой томографии является получение очень детализированных изображений. Очень важным является определение формы новообразования, которая в значительной степени определяет доброкачественность опухоли. Зачастую негладкая (звёздчатая) форма свидетельствует о недоброкачественности образования. Для решения последней задачи очень важно получение реконструкции сечения с высокой точностью.

В томографических задачах существует два разрешения. Одно по пространству, а второе по восстанавливаемому в томографии абсолютному значению функции скорости. Основной проблемой в медицине является обнаружение новообразований при малом отклонении скорости в пределах 10 %. Как видно из результатов расчётов, разработанные алгоритмы позволяют восстанавливать абсолютное значение функции скорости с высокой точностью.

В заключение раздела 3.5 отметим, что выражение для градиента функционала невязки (3.16) было получено в предположении выполнения

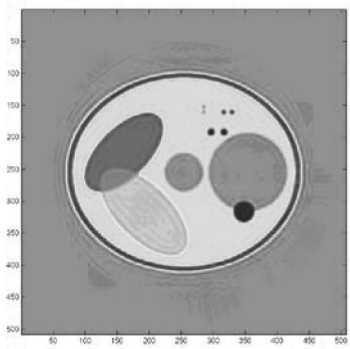


Рис. 3.9. Восстановленный скоростной разрез 2D объекта по точным граничным условиям

граничного условия (3.3): $\partial_n u|_{ST} = p(r,t)$, где $p(r,t)$ – некоторая известная функция. Это означает, что в этом варианте для восстановления скоростного разреза необходимо использовать значения как $u(r,t)|_{ST} = U(s,t)$, так и $\partial_n u(r,t)|_{ST} = p(r,t)$ на границе области S, где $p(r,t)$ может быть найдена по экспериментальным данным $U(s,t)$ на границе S из решения внешней для области Ω задачи. На рис. 3.9 приведены результаты реконструкции скоростного разреза именно с такими граничными данными. В случае, если ошибка задания входных данных отсутствует, скоростной разрез восстанавливается идеально.

Все приведённые выше модельные задачи рассчитывались при условиях «прозрачности» границы, на которой происходит измерение волнового поля. В самом простом варианте плоской волны, падающей нормально на границу, условие неотражения или, что то же самое, «прозрачности» границы, приближённо можно записать в виде $\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5}\partial_t u|_{ST}$. Существуют более продвинутые варианты условия неотражения границы S [64]. При использовании в расчётах условия «прозрачности» возможны неточности восстановления скоростного разреза, связанные с не совсем точным вычислением градиента функционала невязки, формально выведенного при граничном условии (3.3). Однако, как видно из сравнения приведённых выше рисунков с рис. 3.9, восстановленные скоростные разрезы мало отличаются друг от друга.

3.6. Применение суперкомпьютеров общего назначения для решения обратных задач волновой томографии в послойных моделях

3.6.1. Особенности организации параллельных вычислений в 2.5D схеме волновой томографии

Как отмечалось выше, одна из проблем решения рассматриваемой задачи состоит в необходимости выполнения огромного объёма вычислений. Эффективным методом решения этой проблемы является

использование параллельных вычислений на многопроцессорных системах. Возможность эффективного использования параллельных вычислений при решении обратной задачи определяется структурой алгоритма, возможностью выделения большого числа максимально вычислительно независимых блоков.

Рис. 3.10. Представление структуры объекта в томографии по слоям

В послойной 2.5D схеме волновой томографии 3D объекта рассматривается набор двумерных задач, каждая из которых представляет собой коэффициентную обратную задачу для двумерного уравнения гиперболического типа. Этот подход подробно исследован [31, 35, 38, 39]. Рассмотрение слоев в совокупности описывает трёхмерную структуру объекта (рис. 3.10). При таком подходе вычисления в каждом слое производятся независимо. Следовательно, распараллеливание вычислений по слоям является максимально эффективным.

Дальнейшее распараллеливание вычислений выполняется по источникам излучения. Как видно из постановки (3.1)–(3.3), задача решается для различных положений источника. Количество таких положений в реальном эксперименте может достигать нескольких десятков. Заметим, что основной объём вычислений, т. е. решение основной (3.1)–(3.3) и «сопряжённой» (3.9)–(3.11) задач для разных положений источника выполняется независимо. Это говорит о том, что структура рассматриваемого алгоритма такова, что имеется возможность эффективного распараллеливания вычислений для каждого слоя задачи по источникам.

Рассмотрим возможность дальнейшего распараллеливания при проведении вычислений для выбранного слоя и заданного источника. Необходимо найти градиент $\Phi'_c(u(c))$ по формуле (3.16) для функционала невязки. Для этого находим поля $u(r, t)$ и $w(r, t)$ основной и «сопряжённой» задач соответственно. Для вычисления $u(r, t)$воспользуемся явной разностной схемой (3.17) для уравнения (3.1) в области, не содержащей источников. Аналогичная схема используется для уравнения (3.9).

Применение явных схем очень эффективно с точки зрения распараллеливания. Воспользуемся известным методом распараллеливания по пространству [67]. Как видно из схем, вычисление значения в точке на новом слое по времени зависит только от ближайших соседних точек на текущем и предыдущем слоях. Предлагаемый способ распараллеливания

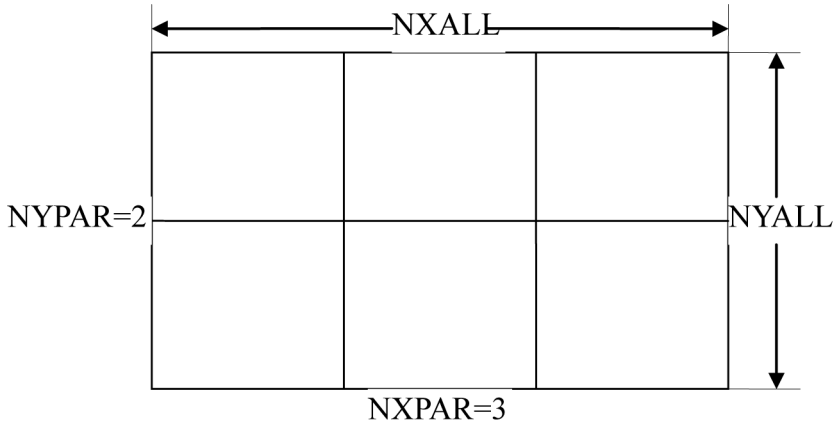


Рис. 3.11. Разбиение поля вычислений на независимые части

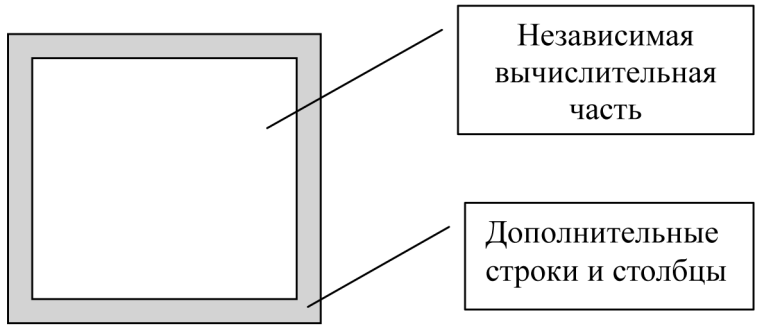


Рис. 3.12. Структура области вычислений каждого процесса

по пространству состоит в том, что общее поле вычислений размером NYALL × NXALL точек разбивается на NYPAR × NXPAR одинаковых частей, вычисления в которых производятся различными вычислительными ядрами (рис. 3.11).

Для вычисления точки на каждой границе части необходимо знать значения на соответствующей границе соседней части с предыдущего слоя по времени. Поэтому добавим с каждой стороны части строку или столбец значений соответствующей границы соседней части (рис. 3.12).

Таким образом, каждый процесс выполняет вычисления для нового временного слоя во внутренней области своей выделенной части общего

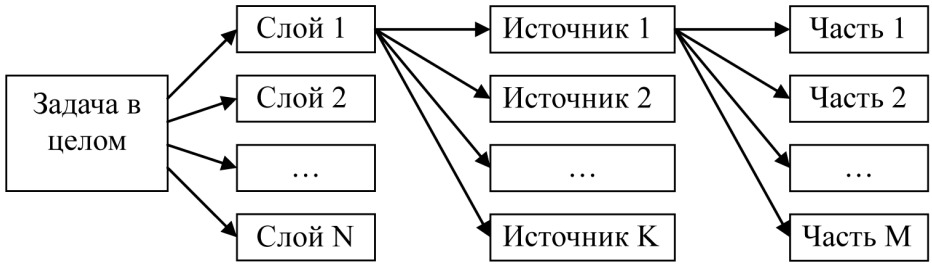


Рис. 3.13. Схема распараллеливания

поля независимо от других, после чего происходит обмен граничными значениями с «соседями».

В целом, описанные выше подходы в задаче томографии теоретически обеспечивают высокую эффективность и масштабируемость решения поставленной задачи. Первичное распараллеливание производится по слоям трёхмерной томографии. Вычисления в каждом таком слое могут быть распараллелены по различным источникам сигнала, которые в свою очередь могут быть разбиты на независимые вычислительные части (рис. 3.13).

При решении реальных задач ультразвуковой томографии размер вычислительной сетки может достигать нескольких тысяч точек по каждой координате, количество источников – нескольких десятков, количество слоёв – нескольких десятков. Вычислительные ресурсы (память, вычислительная мощность), необходимые для решения такой задачи в разумные сроки, многократно превышают возможности отдельно взятого вычислительного ядра. Программа с предлагаемой архитектурой хорошо масштабируема и позволяет практически неограниченно наращивать ресурсы вычислительного кластера. Например, если требуется произвести расчёты на сетке 2048×2048 точек в 50 слоях при наличии 8 источников излучения, используемый подход к распараллеливанию вычислений позволяет легко масштабировать вычисления, меняя количество вычислительных частей для расчёта каждого слоя. При разбиении слоя на 16 частей по координатам X и Y получаем распараллеливание задачи на $50\times8\times16\times16 = 102400$ процессов. Однако с тем же успехом можно разбить слой на 8 частей по координате X и Y. В таком случае мы получаем число задействованных процессоров $50\times8\times8\times8 = 25600$ соответственно. Таким образом, предложенная схема распараллеливания позволяет

свободно маневрировать, меняя соотношение время расчёта / используемые ресурсы для достижения максимальной эффективности даже для очень большого числа процессов.

3.6.2. Оптимизация процедуры параллельных вычислений на слое

Как видно из архитектуры программы, распараллеливание по слоям и источникам достаточно очевидно, и его высокая эффективность не вызывает сомнения. Поэтому более подробно рассмотрим распараллеливание процесса вычислений в отдельно взятом томографическом слое при фиксированном положении источника. Для нахождения градиента согласно формуле (3.16) необходимо знание полей $u(r, t)$ и $w(r, t)$ в любой точке слоя r в каждый момент времени из заданного диапазона $(0, T)$. Из структуры алгоритма следует, что для этого необходимо провести вычисление $u(r, t)$ в «прямом» времени, а затем, используя полученные граничные значения, провести вычисление $w(r, t)$ в «обратном» времени. На первый взгляд кажется естественным сохранять значения $u(r, t)$ при расчёте в «прямом» времени, чтобы далее использовать их при расчёте градиента. Однако оценим необходимый объём памяти для сохранения $u(r, t)$. Если отдельный процесс проводит вычисления на прямоугольной области размера $N_x \times N_y$ точек с количеством слоев по времени N_t, то необходимо хранить $N_x \times N_y \times N_t$ значений типа *double*. N_t обычно раза в 3 больше NXALL – количества точек вдоль одной оси на всей области расчётов задачи. Кроме того, для областей, прилегающих к границе всего томографического слоя, необходимо хранить экспериментальные данные задачи на границе. С учётом всех накладных расходов это приводило к тому, что для вычислительных узлов с памятью ~1 Гб и размером томографического слоя 1000×1000 точек требовалось разбивать весь слой минимум на 7×7 вычислительных частей, для того чтобы данные одной части поместились в память одного вычислительного узла кластера. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация, когда задача может решаться только на большом числе процессов, что не всегда приемлемо.

Для преодоления этой проблемы был предложен алгоритм, при котором поле $u(r, t)$ не сохраняется при прямом проходе, а сохраняются только граничные значения. При расчётах в «обратном» времени поля $w(r, t)$, одновременно вычисляем $u(r, t)$ в «обратном» времени, используя сохраненные граничные значения. Такая схема расчётов приводит

к увеличению количества вычислений на ~30–50 %, однако позволяет свободно маневрировать с имеющимися вычислительными узлами.

Возможность корректного вычисления $u(r, t)$ в «обратном» времени по сохранённым граничным значениям легко вытекает из следующих соображений. Пусть задан вектор u_{ijk}, где $i = 0, \ldots, N_x$, $j = 0, \ldots, N_y$, $k = 0, 1, 2,$ причём для всех внутренних точек выполняется соотношение (3.17). Зададим вектор v_{ijk} где $i = 0 \ldots, N_x$, $j = 0 \ldots, N_y$, $k = 0, 1, 2,$ причём пусть $v_{ijk} = u_{ijk}$ при k = 1, 2, а также при выполнении хотя бы одного условия ($i = 0$), ($i = N_x$), ($j = 0$), ($j = N_y$). Пусть для всех внутренних точек v_{ijk} выполняется соотношение, аналогичное (3.17). Тогда $v_{ijk} = u_{ijk}$ во всех точках.

Как мы писали выше, для распараллеливания вычислений в отдельном слое использовался метод распараллеливания по пространству, который состоит в том, что общее поле вычислений размером NYALL × NXALL точек матрицы разбивается на NYPAR × NXPAR = M частей-блоков размером Nxbl × Nybl, вычисления в которых производятся различными вычислительными ядрами параллельно (M – ядер) (рис. 3.11).

Один из основных принципов разбиения на блоки состоит в выравнивании загрузки процессоров. Для минимизации времени ожидания процессором данных с соседних процессоров расчёты всех блоков должны быть завершены синхронно, поэтому следует разбивать матрицу на блоки с равным объёмом вычислений. В нашем случае явной разностной схемы, одинаковой во всех точках, используем простейший вариант разбиения на блоки одинакового размера.

Для минимизации межпроцессорных обменов следует минимизировать периметр блоков (в данном случае периметр равен 2x(Nybl + Nxbl) по отношению к их площади (в данном случае площадь равна Nybl x Nxbl). Как известно, минимум периметра у прямоугольника заданной площади достигается при Nybl = Nxbl. Это требование было проверено экспериментально на модельных задачах. Для этого были проведены эксперименты на сетках размером 502×502 и 1002×1002, результаты которых приведены в табл. 3.2 и 3.3. В верхней строке указаны значения NXPAR × NYPAR для различных разбиений матрицы по процессам, в нижней – время расчёта 10 итераций. При перестановке значений NXPAR и NYPAR результат не меняется. Из данных таблиц видно, что чем ближе значения NXPAR и NYPAR друг к другу, тем меньше время счёта.

Таблица 3.2

Сравнение вариантов разбиения сетки, размер сетки – 502×502, число процессов 36

Разбиение матрицы	1×36	2×18	3×12	6×6
Время, сек	83	59	55	49

Таблица 3.3

Сравнение вариантов разбиения сетки, размер сетки – 1002×1002, число процессов 64

Разбиение матрицы	1×64	2×32	4×16	8×8
Время, сек	692	386	254	220

3.6.3. Исследование масштабируемости алгоритмов 2D волновой томографии

Исследуем масштабируемость программы, после чего определим и реализуем способы оптимизации MPI-коммуникаций для улучшения масштабируемости.

Основными параметрами данной программы, которые могут влиять на масштабируемость программы, являются (рис. 3.11): NXALL и NYALL – размеры двумерной сетки, на которой происходят вычисления всей задачи в слое; NXPAR и NYPAR – число областей разбиения сетки слоя по каждому измерению; NITER_SOU – число различных положений источника в слое. Вычисления в каждой области выполняются в рамках отдельного процесса. При этом общее число процессов, используемое при выполнении программы в слое, должно быть равно NITER_SOU × NXPAR × NYPAR.

Без ограничения общности пусть число положений источника далее всегда равно 4 (NITER_SOU = 4). Все дальнейшие исследования и замеры времени выполняются для 10 итераций итерационного процесса решения обратной задачи в одном слое. Значения NXALL и NYALL совпадают и равны 1002. Значения NXPAR и NYPAR также совпадают и могут варьироваться от 1 до 11. При таких значениях параметров число процессов может

изменяться от $4 = 4 \times 1 \times 1$ до $484 = 4 \times 11 \times 11$. Такие значения параметров позволяют получить результаты, близкие к требуемым на практике.

Для первоначального кода программы было проведено исследование масштабируемости при выбранных значениях входных параметров. Результаты экспериментов приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Время выполнения программы. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**16**	**36**	**64**	**100**	**144**	**196**	**256**
Время, сек	665	343	267	192	187	201	220

По результатам, приведённым в этой таблице, видно, что при увеличении числа процессов задача сначала хорошо масштабируется, однако достаточно быстро время не только перестаёт уменьшаться, но и начинает увеличиваться. Это означает, что накладные расходы на коммуникации начинают расти быстрее, нежели уменьшается объём вычислений, который приходится на каждый процесс. Более подробное исследование MPI-вызовов, используемых в программе, поможет определить, почему возникают такие накладные расходы, а также найти возможные пути оптимизации.

Для исследования времени выполнения MPI-вызовов был использован профилировщик mpiP [68, 69]. Данный программный инструмент позволяет получить общее представление о структуре коммуникаций, в частности: определить процент времени по каждому процессу, который был потрачен на все MPI-вызовы; процент времени, потраченного на выполнение отдельных MPI-вызовов; объём передаваемой информации и т. д.

Результаты, полученные с помощью данного профилировщика, приведены в табл. 3.5. В строках указано: 1) число процессов, которое было использовано в программе; 2) время выполнения всей программы, в секундах; 3) доля времени выполнения всей программы, которое пришлось на обработку MPI-вызовов; 4) доля времени обработки MPI-вызовов, которое пришлось на выполнение только вызовов MPI_Bcast.

Как видно из данной таблицы, при достаточно большом числе процессов на обработку MPI-вызовов тратится почти всё время выполнения программы, более того, при увеличении числа процессов практически всё

это время затрачивается на выполнение только операций MPI_Bcast (здесь учитываются все операции MPI_Bcast в программе). Следующей MPI-операцией после MPI_Bcast, которая использует больше всего времени в данной программе, является MPI_Allreduce, однако на неё затрачивается всего несколько процентов, поэтому в первую очередь необходимо провести оптимизацию именно вызовов MPI_Bcast.

Таблица 3.5

Данные профилировки программы. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**16**	**64**	**144**	**256**
Время, сек	665	267	187	220
% времени на MPI	10.4	47.6	93	92.7
% MPI_Bcast от MPI	79	97.1	98.1	95.7

Анализ исходного кода показывает, что MPI_Bcast используется только в трёх небольших внутренних циклах программы. Таким образом, узкое место программы локализовано. Все три цикла устроены практически одинаково:

```
for (int i = 0; i < prNumber; i + + ) {
 MPI_Bcast(sides[i]. u, Tx * sizeof(double), MPI_BYTE, i, MPI_COMM_
WORLD);
<несколько аналогичных коллективных операций MPI_Bcast>}
```

где prNumber – общее число процессов; Tx = (NXALL-2)/NXPAR + 2. Каждый процесс рассылает некоторый набор данных по всем остальным процессам. Отличие трёх циклов заключается только в том, что в одном из них рассылается чуть бóльший объём данных, однако это отличие несущественно. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только один цикл, и все описанные преобразования будут аналогичным образом применяться к другим циклам.

Также с помощью mpiP удалось определить, что вычисления и основные коммуникации между процессами распределены достаточно равномерно – время, затрачиваемое на выполнение MPI_Bcast, а также на сами вычисления, практически одинаковое у всех процессов. Это облегчает оптимизацию, поскольку в противном случае отдельное внимание необходимо было бы сосредоточить на оптимизации нагрузок между

процессами, для того чтобы каждый процесс выполнял одинаковый объём работ.

3.6.4. Оптимизация программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии

После определения узкого места в программе, необходимо попытаться определить, можно ли и каким образом модифицировать этот фрагмент программы для того, чтобы уменьшить время его выполнения.

Как было сказано ранее, в программе происходят вычисления для нескольких различных положений источника, при этом на каждое положение выделяется одинаковое число процессов, которые предназначены для вычислений только в рамках этого положения. В данном исследовании было использовано 4 различных положения источника, соответственно, для вычислений по каждому источнику выделяется по prNumber/4 процессов. В тех циклах, которые являются узким местом, в первоначальной версии программы для простоты кода проводилась рассылка граничных данных области по всем остальным процессам, включая и процессы с другим положением источника с помощью коммуникатора MPI_COMM_WORLD. Однако алгоритм программы устроен таким образом, что вычисления для разных источников независимы, и пересылать данные между ними не нужно.

Это приводит к **первой оптимизации**: нет необходимости делать рассылку по всем процессам, нужно передавать данные только процессам с тем же положением источника. Для реализации этого нужно создать 4 коммуникатора, по одному на каждое положение источника, и делать рассылку только по соответствующему коммуникатору. В данном случае достаточно с помощью команды MPI_Comm_split() разбить коммуникатор MPI_COMM_WORLD, после чего заменить его в циклах на новый созданный коммуникатор. Такая оптимизация реализуется просто, но позволяет сократить объём передаваемых данных в 4 раза.

Далее, из структуры алгоритма ясно, что в циклах, которые являются узким местом программы, на самом деле необходима передача данных только процессам-соседям по сетке, в то время как в действительности происходит передача всем процессам с тем же положением источника. Соответственно, для дальнейшей **второй оптимизации** программы необходимо заменить коллективную рассылку данных на рассылку только

по соседям. В этом случае использование вместо MPI_COMM_WORLD коммуникаторов меньшего размера, что применялось при первой оптимизации, становится уже не актуальным.

Данная оптимизация немного сложнее и требует замену вызовов MPI_Bcast на коммуникации типа «точка-точка». Также необходимо учитывать, что число соседей у процессов может быть разное. После внесённых изменений оптимизированный цикл выглядит следующим образом:

```
for (int i = 0; i < = 8; i + + ) {
 if (neighs[i] ! = -1) { // then send and resv
    MPI_Irecv(sides[neighs[i]]. u, Tx, MPI_DOUBLE, neighs[i], 0,
MPI_COMM_WORLD,
&reqs[0]);
    <несколько аналогичных операций MPI_Irecv>
    MPI_Send(sides[nProc]. u, Tx, MPI_DOUBLE, neighs[i], 0, MPI_
COMM_WORLD);
    <несколько аналогичных коллективных операций MPI_Send>

    int ret = MPI_Waitall(5, reqs, stats);
}}
```

Массив neighs содержит ранги процессов-соседей, с которыми текущему процессу необходимо обменяться данными. Каждый процесс инициирует асинхронный приём сообщений от всех соседей, а затем в синхронном режиме отправляет свои данные соседям. После получения и отправки всех сообщений одному процессу-соседу происходит ожидание завершения асинхронных вызовов с помощью вызова MPI_Waitall. В данном случае использование асинхронного приёма сообщений используется для избегания тупиковых ситуаций [70].

Использование такой оптимизации позволяет значительно ускорить работу программы за счёт существенного уменьшения объёма передаваемых данных. Причём, если при использовании первой оптимизации объем передаваемых данных при увеличении числа процессов продолжал расти с той же скоростью, что и в изначальной, неоптимизированной версии программы, то в данном случае объём передаваемых данных увеличивается гораздо медленнее.

Сравнение первой и второй (opt_v2) оптимизаций программы приведено в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Сравнение первого и второго вариантов оптимизации. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**144**	**196**	**256**	**324**	**400**	**484**
Время, сек, opt_v1	118	114	120	134	148	168
Время, сек, opt_v2	82	67	62	58	59	60

Более подробные данные по выполнению MPI-вызовов приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Данные по MPI, первый и второй варианты оптимизации. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**196**		**484**	
Версия программы	**opt_v1**	**opt_v2**	**opt_v1**	**opt_v2**
Время, сек	114	67	168	60
% времени на MPI	77.15	63.8	93.5	88.8
Объем передаваемых данных, байт	4.26e + 11	5.54e + 10	1.67e + 12	9.57e + 10

Анализируя результаты в табл. 3.7, можно увидеть, что при увеличении числа процессов объёем передаваемых данных в варианте opt_v2 действительно увеличивается медленнее, чем в варианте opt_v1: на 196 процессах объём данных меньше в 7.7 раз, а на 484 процессах – уже в 17.5 раз.

Дальнейшее исследование показало, что использование синхронной передачи сообщений с помощью MPI_Send не является оптимальным вариантом, поскольку на синхронизацию в MPI_Send (т. е. ожидание начала передачи) тратится достаточно много времени. Это происходит из-за того, что приходится ожидать вызов MPI_Irecv на другом процессе. Более того, после обмена сообщениями с каждым соседом из-за MPI_Waitall приходится ожидать завершение всех приёмов сообщений от данного соседа, что также требует значительного времени. Поэтому было решено провести **третью оптимизацию** (opt_v3): использовать только асинхронный приём и передачу, а также вынести MPI_Waitall из тела цикла. В таком случае будет использован только один вызов MPI_Waitall после запуска

всех MPI_Isend и MPI_Irecv для ожидания завершения всех операций. Изменённый фрагмент выглядит следующим образом:

```
int mpi_comms = 10;
int neighs_num = 9;
int neigh_count = 0;
for (int i = 0; i < neighs_num; i + + ) {
    if (neighs[i] ! = -1) { // then send and resv
    MPI_Irecv(sides[neighs[i]]. u, Tx, MPI_DOUBLE, neighs[i], 0, MPI_
COMM_WORLD,                    &reqs[mpi_comms*neigh_count + 0]);
    <несколько аналогичных операций MPI_Irecv>
    MPI_Isend(sides[nProc]. u, Tx, MPI_DOUBLE, neighs[i], 0, MPI_
COMM_WORLD,
&reqs[mpi_comms*neigh_count + 5]);
    <несколько аналогичных операций MPI_Isend>
    neigh_count + + ;
    }
}
int ret = MPI_Waitall(neigh_count*mpi_comms, reqs, stats);
```

где mpi_comms отражает число коммуникаций между двумя процессами (всего 5 вызовов MPI_Isend и 5 вызовов MPI_Irecv), neigh_count – число соседей, с которыми уже были инициированы все операции приёма и передачи. Данные переменные нужны для корректной работы вызова MPI_Waitall.

Использование данного приёма позволяет получить выигрыш во времени, сопоставимый с выигрышем от предыдущей оптимизации (табл. 3.8).

Таблица 3.8

Сравнение второго и третьего вариантов оптимизации. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**144**	**196**	**256**	**324**	**400**	**484**
Время, сек, opt_v2	82	67	62	58	59	60
Время, сек, opt_v3	67	48	43	33	30	28

Таким образом, только изменение порядка и способа выполнения коммуникаций привело к ускорению работы программы в среднем в

1.5–2 раза. В табл. 3.9 приведена информация о том, как изменились данные по выполнению MPI-вызовов.

Таблица 3.9

Данные по MPI, второй и третий варианты оптимизации. NXALL = NYALL = 1002

Число процессов	**196**		**484**	
Версия программы	**opt_v2**	**opt_v3**	**opt_v2**	**opt_v3**
Время, сек	67	48	60	28
% времени на MPI	63.8	42.5	88.8	79.05
Объем передаваемых данных, байт	5.54e + 10	5.54e + 10	9.57e + 10	9.57e + 10

Очевидно, что в данном случае объём передаваемых данных остаётся тем же самым. Однако доля времени выполнения всей программы, которое пришлось на обработку MPI_вызовов, значительно снижается, что и приводит к уменьшению общего времени выполнения.

В заключение приведём сравнение всех рассмотренных вариантов программы (см. рис. 3.14). Для варианта basic подсчитаны не все значения,

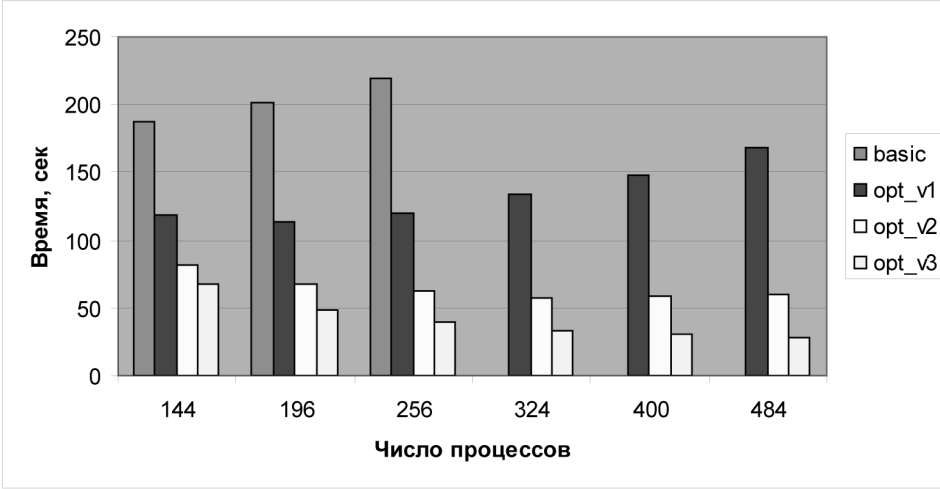


Рис. 3.14. Сравнение исходной и оптимизированных версий программы. NXALL = NYALL = 1002

поскольку время счёта при увеличении числа процессов начинает существенно расти, однако увидеть общую динамику это не мешает. Видно, что в исходном варианте и после первой оптимизации при увеличении числа процессов время выполнения почти сразу начинает увеличиваться. В следующих вариантах оптимизации этого уже не наблюдается: время продолжает существенно уменьшаться и при большом числе процессов.

Все осуществлённые оптимизации являются достаточно простыми и могут быть легко реализованы, однако, несмотря на простоту, они позволили ускорить работу программы на порядок, а также обеспечить гораздо более высокую масштабируемость.

Более подробно проблемы оптимизации программ реконструкции 2D изображений в волновой томографии можно найти в работах [71, 72].

3.7. Выводы

С точки зрения математических методов существуют интегральный и дифференциальный подходы к решению коэффициентных обратных задач в рамках волновых моделей. В интегральном подходе решение рассматриваемой трёхмерной нелинейной обратной задачи волновой томографии даже на современных суперкомпьютерах возможно только на крупных расчётных сетках в силу огромного объёма вычислений. Рассмотренные в настоящей главе методы решения обратных задач, основанные на дифференциальном подходе во временно́й области, требуют существенно меньшего объёма вычислений и с успехом решают задачи в двумерном случае на сетках до нескольких тысяч точек по каждой координате.

Вычислительные проблемы в этом случае вызваны необходимостью постановки дополнительных граничных условий, которые не связаны с физическими характеристиками изучаемых объектов, а являются следствием использования техники разностных схем в ограниченной области пространства. Рассмотренные модели учитывают волновые эффекты дифракции, рефракции, переотражения зондирующего излучения. Алгоритмы решения базируются на возможности прямого вычисления градиента функционала невязки с помощью решения начально-краевых задач для волнового уравнения в прямом и обратном времени.

В этой главе приведены эффективные итерационные численные методы решения задач волновой томографии на суперкомпьютерах для

послойной 2.5D томографической схемы реконструкции 3D объекта при зондировании исследуемого объекта импульсными источниками. Устойчивые явные разностные схемы второго порядка точности для расчётов в прямом и обратном времени обеспечивают возможность эффективного распараллеливания вычислений на суперкомпьютерах. Как правило, алгоритмы ориентированы на использование технологии MPI/OpenMP. В приведённых примерах выделено несколько уровней параллелизма задачи, которые позволяют освоить несколько основных приёмов распараллеливания вычислений. Применяемые приёмы распараллеливания достаточно просты, однако по опыту авторов, чем проще методы, тем выше их эффективность.

Приведённые модельные расчёты показывают высокую перспективность дифференциального подхода. Открывается возможность для проведения расчётов на мелких сетках с высоким разрешением не хуже 3 мм. Модельные расчёты продемонстрировали возможность хорошего восстановления не только формы неоднородности, но и с высокой точностью абсолютного значения функции скорости. Эти результаты получены при небольшом количестве источников, но достаточно большом количестве приёмников, расстояние между которыми составляет $\sim \lambda/2$. Проведённые расчёты показали, что алгоритмы эффективно решают обратную задачу в итерационных схемах с начального приближения $c(x, y) = const$. Возможно, это связано с тем, что скорость распространения звука варьирует не более чем на 10 %, что обеспечивает близость к глобальному минимуму функционала.

Одной из наиболее важных задач, обсуждаемых в настоящей книге, является проектирование ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики заболеваний раком молочной железы. Однако алгоритмы и методы решения обратных задач ультразвуковой томографии могут быть полезны и в задачах инженерной сейсмики, неразрушающего контроля в промышленности, радиолокации, гидроакустики.

3.8. Задачи математического практикума к главе 3

Распространение и фокусировка импульса волны в неоднородной среде

В задачах необходимо вычислить распространение с течением времени плоского импульса в неоднородной среде, приведённой на рис. 3.15,

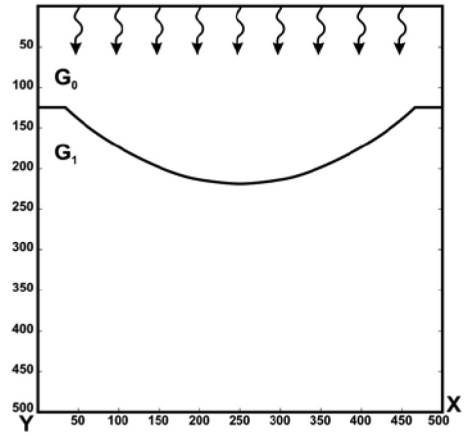


Рис. 3.15. Фантом неоднородной среды из двух сред с фокусирующей линзой на границе

состоящей из областей G_0 и G_1. Наличие линзы на границе раздела сред приводит к фокусировке отраженной волны. В случае, если $v_0 > v_1$ – проходящая волна тоже фокусируется, если $v_0 < v_1$ – проходящая волна рассеивается (v_0 – скорость волны в среде G_0, v_1 – скорость волны в среде G_1).

Плоский волновой импульс падает сверху. В начальный момент времени $t = 0$ и в момент $t = \tau$ импульс находится полностью в среде G_0 и описывается формулой (3.20)

$$\begin{cases} u(x, y, t) = -\exp(\alpha(y - v_0 t - Y_0))\sin\left(\dfrac{4\pi(y - v_0 t - Y_0)}{v_0\Theta}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad Y_0 - v_0\Theta < y - v_0 t < Y_0 \\ u(x, y, t) = 0, \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где Θ – длительность импульса по времени, v_0 – скорость волны в среде G_0, Y_0 – определяет положение переднего фронта волны импульса в момент времени $t = 0$, $\alpha > 0$ – параметр.

Для решения обратных задач ультразвуковой томографии используются итерационные алгоритмы. Как правило, количество итераций составляет 1000 и более. Решение задачи на каждой итерации включает в себя решение прямой задачи распространения волны. Аналогичная задача распространения волны решается на каждой итерации в обратном

времени для сопряжённой задачи для вычисления градиента. Эта процедура выполняется для каждого источника. Таким образом, численное решение обратной задачи может включать более 100 000 процедур решения задачи распространения волны.

Задачи № 1–3 можно решать на обычном персональном компьютере. Время решения не превышает нескольких минут. Для реализации численных алгоритмов приближённого решения обратных задач ультразвуковой томографии, включающих сотни тысяч процедур решения прямой задачи, необходимо распараллеливать процесс вычислений. Решите **задачу № 4** с использованием технологии MPI.

Задача № 1

Выполните следующие операции:

1. Составьте программу, которая задаёт скорость в двухкомпонентной среде с линзой на границе раздела сред. Изображение фантома представлено на рис. 3.15. Скорость задаётся на сетке

$$\left\{(x_i, y_j): x_i = ih, \quad 1 \le i \le Nx; \quad y_j = jh, \quad 1 \le j \le Ny\right\}$$

($Nx = 502$, $Ny = 502$). Размер области 200×200мм. Область G_1 задается из условий

$$(y - 87.5 \text{ мм} > -0.005(x - 100 \text{ мм})^2) \cap (y > 50 \text{ мм}).$$

В области G_1 скорость положить равной $v_1 = 2700$ м/сек, в области G_0 скорость положить равной $v_0 = 1500$ м/сек.

2. Задайте граничные условия на левой и правой границах в виде

$$u(1, j, k) = u(2, j, k) \text{ и } u(Nx, j, k) = u(Nx-1, j, k) \text{ для } j = 1 \ldots Ny,\ k = 1 \ldots Nt.$$

3. Задайте граничные условия на верхней и нижней границах в виде

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5}\partial_t u|_{ST}.$$

В разностной аппроксимации граничные условия на верхней границе принимают вид

$$v_0\,(u(i, 1, k) - u(i, 2, k))/h = -\,(u(i, 1, k + 1) - u(i, 1, k))/\tau \text{ для } i = 1 \ldots Nx.$$

На нижней границе граничные условия принимают вид

$$v_1\,(u(i, Ny, k) - u(i, Ny - 1, k))/h = -\,(u(i, Ny, k + 1) - u(i, Ny, k))/\tau \text{ для } i = 1 \ldots Nx.$$

4. Задайте начальные условия по формуле (3.20) для моментов времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \tau$, полагая следующие значения параметров зондирующего

импульса $\alpha = 400.4$, Y_0 = 0.05 м, v_0 = 1500 м/сек; Θ = 0.00000666 сек, h = 0.2 м/501, $\tau = h/$ (1500 м/сек *3).

5. Проведите расчёты распространения импульса по разностной формуле (3.17)

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{c_{ij}}\tau^2 \Delta u_{ij}^k + 2u_{ij}^k - u_{ij}^{k-1},$$

где $u_{ij}^k = u(i, j, k)$, $c_{ij} = v^{-2}(i, j)$.

Убедитесь, что отражённая волна фокусируется в точке с координатами (100 мм, 37.5 мм) (точка сетки (250, 93.5)). Преломлённая волна фокусируется примерно в точке x = 100мм (250 точка сетки) и y в области от 168 мм до 176 мм (420–440 точки сетки).

Задача № 2

1. Задайте в области G_1 скорость среды v_1 = 3000 м/сек.

2. Повторите те же операции, что и в **задаче № 1,** с учётом новой скорости v_1.

3. Убедитесь, что отражённая волна сфокусировалась в той же точке, что и в **задаче № 1.** Преломлённая волна сфокусировалась примерно в точке x = 100 мм (250 точка сетки) и y в области от 148 мм до 152 мм (370–380 точки сетки).

4. Попробуйте объяснить, почему для разной скорости v_1 точка фокусировки преломлённой волны изменяется, в то время как точка фокусировки отражённой не меняется.

Задача № 3

1. Задайте в области G_1 скорость среды v_1 = 1000 м/с.

2. Повторите те же операции, что и в **задаче № 1,** с учётом новой скорости v_1.

3. Убедитесь, что отражённая волна сфокусировалась в той же точке, что и в **задаче № 1.** Преломлённая волна не фокусируется.

Задача № 4

1. Решите **задачу № 1,** используя технологию MPI для процессоров общего назначения на 4 вычислительных ядрах. Для этого разбейте область расчётов на 4 равных квадрата, как на рис. 3.11, с перекрытием в 1 точку сетки, как на рис. 3.12. Распараллельте вычисления по 1 вычислительному ядру на каждый квадрат. Сравните время расчётов со временем расчёта на одном ядре персонального компьютера.

Глава 4

Обратные задачи 2D волновой томографии как коэффициентные задачи для уравнения в частных производных в моделях с поглощением

4.1. Введение

Скалярными волновыми уравнениями описывается широкий круг физических задач. К таким задачам относятся обратные задачи УЗ томографии в медицине, электромагнитного зондирования, сейсмики, инженерной сейсмики, диагностики промышленных изделий с помощью акустического излучения и т. п. Во всех перечисленных задачах помимо волновых эффектов всегда присутствует поглощение как неотъемлемый физический процесс распространения волн в средах. Так, в задачах ультразвуковой диагностики поглощение в мягких тканях является весьма значимым на частотах, начиная с нескольких сот килогерц. На частоте 20 МГц из-за сильного поглощения удаётся исследовать только подкожные слои. Уровень поглощения на частотах порядка 0.5 МГц в мягких тканях толщиной 5–10 см составляет десятки процентов [73]. Настоящая глава посвящена решению обратных задач волновой томографии, описываемых волновым уравнением с учётом эффектов поглощения. Эта тематика получила развитие только несколько лет назад [32, 74].

Задачей волновой томографии является поиск неоднородностей в диагностируемой области. В задачах с поглощением эти неоднородности могут быть связаны как со скоростью, так и с поглощением. Считается, что аномальная область в скоростном разрезе является более достоверным фактором, если она повторяется и как аномальность по поглощению. Поэтому мы попытаемся искать две функции: как неоднородности по скорости распространения волны, так и неоднородности по поглощению.

Наиболее естественным с математической точки зрения подходом является решение обратной задачи одновременно относительно двух

искомых функций: скоростного разреза и функции, характеризующей неоднородности по поглощению. Именно в такой постановке рассматривается обратная задача в главе 4. Однако, как правило, в работах, рассматривающих задачи волновой томографии в моделях с поглощением, единая обратная задача поиска одновременно двух функций, характеризующих скорость и поглощение, искусственно разбивается на две отдельные задачи поиска этих функций. Сначала ищется одна функция, а затем она используется при решении второй задачи. Примером такого подхода является работа [75], в которой сначала приближённо восстанавливается скоростной разрез. При известном скоростном разрезе в рамках лучевой модели на втором этапе восстанавливаются неоднородности по поглощению. Эта работа посвящена эффектам фотоакустики с диапазоном частот больше 10 МГц. Для таких высоких частот вполне можно использовать лучевую модель. В задаче дифференциальной диагностики рака груди используются частоты ниже 1 МГц, где эффекты дифракции являются значимыми и использование лучевых моделей является проблематичным.

В главе на теоретическом уровне получено точное выражение для градиента функционала невязки при варьировании функционала как по скорости, так и по поглощению, что позволяет построить итерационные алгоритмы приближённого решения обратной задачи. Одной из целей главы является оценка возможности одновременного определения скоростного разреза и неоднородностей по поглощению из решения обратной задачи.

В задачах волнового зондирования поглощение, как правило, возрастает с увеличением частоты. Существуют различные модели поглощения, включающие даже дробно-степенную зависимость от частоты в задачах диагностики в медицине. В настоящей главе рассматриваются две модели: как простейшая, не зависящая от частоты, так и модель с нелинейной зависимостью поглощения от частоты.

Мы будем рассматривать обратную задачу волновой томографии во временной области в моделях, учитывающих поглощение как нелинейную коэффициентную задачу в дифференциальном подходе. Как и в предыдущей главе, в силу огромного объёма вычислений алгоритмы решения ориентированы на использование высокопроизводительных суперкомпьютеров. Структуры алгоритмов в задачах с поглощением и без

поглощения практически не отличаются и допускают такое же эффективное и масштабируемое распараллеливание на процессорах общего назначения.

В главе 4 сделана попытка ответить на следующие вопросы:

1. Хорошо известно, что в рентгеновской томографии стандартный набор томографических данных позволяет восстановить только одну функцию. Известно, что в лучевой модели томографии можно пытаться восстанавливать как скоростной разрез, так и поглощающие характеристики среды. Можно ли в волновой томографии восстанавливать не только скоростной разрез, но и функцию, характеризующую поглощение?

2. Если ответ на первый вопрос положителен, что восстанавливается лучше – скоростной разрез или функция, характеризующая поглощение?

3. Насколько ответ на вопросы 1 и 2 зависит от модели поглощения?

4. Можно ли пытаться восстанавливать скоростной разрез в моделях без поглощения, если оно реально присутствует и значимо?

В настоящей главе разработаны численные методы, алгоритмы и проведены расчёты модельных задач, позволяющих ответить на поставленные выше вопросы. Разработанные алгоритмы ориентированы в первую очередь на разработку ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы.

4.2. Скалярные волновые модели распространения излучения в неоднородных средах

Прямые и обратные задачи волновой томографии как задачи поиска скоростного разреза и неоднородностей по поглощению рассматриваются в рамках следующих математических моделей.

Волновые модели с поглощением, не зависящим от частоты

Простейшей волновой моделью, описывающей поглощение, является **Модель 1.** Распространение волны в Модели 1 описывается дифференциальным уравнением:

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)u_t(r,t)-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t). \qquad (4.1)$$

Здесь $c^{-0.5}(r)=v(r)$ является скоростью волны в среде, $r\in\mathbf{R}^2$ – положение точки в пространстве, Δ – оператор Лапласа по переменной *r*.

Генерируемый источником импульс описывается функцией $f(t)$, $a(r)$ – описывает поглощение в среде. Как будет показано ниже, в этом случае поглощение сигнала не зависит от частоты. Как результат, импульс по мере распространения убывает по амплитуде, но практически не меняет форму. Модель 1 (4.1) используется как модель распространения УЗ волн в мягких тканях [76, 77]. В одномерном случае это уравнение соответствует телеграфному уравнению.

Найдём, как зависит поглощение от частоты для плоской волны для уравнения

$$cu_{tt}(r,t)+au_t(r,t)-u_{xx}(r,t)=0, \tag{4.2}$$

где $c=const>0$, $a=const\neq 0$. Решение будем искать в виде

$$u(x,t)=\exp\left(-i\omega(\frac{x}{v}-t)-bx\right), \tag{4.3}$$

где $b\neq 0$ – определяет поглощение. Подставляем (4.3) в (4.2), получим

$$c(i\omega)^2-(-\frac{i\omega}{v}-b)^2+ai\omega=0.$$

Разделив действительную и мнимую части, после несложных преобразований получаем, что в первом приближении по $\frac{a}{\omega}$ параметр *b,* определяющий поглощение, равен $b=|a|/2\sqrt{c}$, т. е. не зависит от частоты.

В задачах УЗ томографии мягких тканей поглощение в действительности зависит от частоты. Существуют разные экспериментальные данные, из которых следует, что зависимость от частоты для продольных волн имеет степень от 1 до 2. Таким образом, Модель 1 с физической точки зрения не самым лучшим образом описывает характер поглощения. Тем не менее эта модель используется в УЗ томографии мягких тканей.

Волновые модели с поглощением, зависящим от частоты

Моделью с квадратично зависящим от частоты поглощением является **Модель 2**. Распространение волны в Модели 2 описывается дифференциальным уравнением:

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)(\Delta u)_t-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t). \tag{4.4}$$

Рассмотрим вывод уравнения, описывающего Модель 2 (4.4), на физическом уровне строгости. Будем рассматривать так называемое стоксовское поглощение в вязких средах [78, 79]. Рассмотрим распространение волн в среде с потерей энергии, связанной с переходом части энергии в тепло. Диссипация акустической энергии может быть обусловлена теплопроводностью среды, различными молекулярными процессами. В большинстве реальных сред основной причиной поглощения ультразвука является вязкость. В соответствии с законом Ньютона для сил внутреннего трения, будем считать, что в первом приближении вязкие напряжения пропорциональны скорости деформации. Тогда для изотропной идеальной среды при отсутствии сдвиговой упругости в выражение для напряжения σ добавляем вязкое напряжение $a\,\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\xi$:

$$\sigma = K\mathrm{div}\xi + a\,\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\xi, \tag{4.5}$$

где $K\mathrm{div}\xi$ описывает упругое напряжение (закон Гука для всестороннего сжатия), $\mathrm{div}\xi$ вследствие уравнения неразрывности является объёмным расширением, ξ – вектор смещения, K – модуль объёмной упругости, a – коэффициент вязкости. В нашем случае тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, где p – давление в среде ($\sigma = -p$). Тогда уравнение движения (в соответствии со вторым законом Ньютона) имеет вид:

$$-\nabla p = \rho_0\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \rho_0\,\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}, \tag{4.6}$$

где ρ_0 – плотность. Для безвихревого характера движения введём потенциал скоростей [80]. Из уравнения (4.6) следует

$$v(t) = v(0) - {}^{1}\!/_{\rho_0}\,\nabla\int_0^t p\,dt,$$

где $v(0)$ – начальное распределение скоростей. Введём потенциал при $t = 0$ $v(0) = -\nabla f$. Тогда

$$v(t) = -\nabla\Big(f - {}^{1}\!/_{\rho_0}\int_0^t p\,dt\Big) = -\nabla F(t),$$

где введён потенциал скоростей, равный выражению в скобках, причём $\frac{\partial}{\partial t}F(t) = {}^{1}\!/_{\rho_0}\, p$. Беря производную по времени от обеих частей в выражении (4.5) и учитывая, что $\sigma = -p$, имеем

$$\begin{aligned} -p_t = -\rho_0 F_{tt} = K\mathrm{div}(v) + a\,\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}(v) = \\ = -K\mathrm{div}\nabla F - a\,\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\nabla F = -K\Delta F - a\,\frac{\partial}{\partial t}\Delta F. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для медленно меняющихся коэффициентов уравнение для скорости получим, беря градиент, а уравнение для давления получим, беря производную по времени от обеих частей в (4.7):

$$\rho_0 v_{tt} = K\Delta v + a\,\left(\Delta v\right)_t,$$

$$\rho_0 p_{tt} = K\Delta p + a\,\left(\Delta p\right)_t. \tag{4.8}$$

Таким образом, для рассматриваемой модели с поглощением для любой из скалярных компонент v и p можно использовать Модель 2 (4.4).

Найдем, как зависит поглощение от частоты в рассматриваемой модели для плоской волны для уравнения

$$cu_{tt}(r,t) + au_{xxt}(r,t) - u_{xx}(r,t) = 0, \tag{4.9}$$

где $c = const > 0,\ a = const \neq 0$. Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \exp\left(-i\omega({}^{x}\!/_{v} - t) - bx\right),$$

где $b \neq 0$ определяет поглощение. Подставляем его в (4.9), получим

$$c(i\omega)^2 - (-\frac{i\omega}{v} - b)^2 + a(-\frac{i\omega}{v} - b)^2 i\omega = 0.$$

Выделяя действительную и мнимую часть и проведя несложные алгебраические преобразования, получим точные выражения для b и v как функций от ω:

$$v = -2\frac{\omega^2 a^2 + 1}{c\omega^2 a}b, \quad b^2 = -\frac{c\omega^2}{2(\omega^2 a^2 + 1)} \pm \frac{c\omega^2}{2(\omega^2 a^2 + 1)}\sqrt{\omega^2 a^2 + 1}.$$

Разлагаем корень при малых ωa $\sqrt{\omega^2 a^2+1} \approx 1+\frac{\omega^2 a^2}{2}$. Получаем, что для малых ωa $b_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{c}\,|a|\omega^2}{2\sqrt{\omega^2 a^2+1}}$, а соответственно $v_{1,2} = \mp\frac{|a|\sqrt{\omega^2 a^2+1}}{a\sqrt{c}}$. Таким образом, в модели (4.9), коэффициент *b,* ответственный за поглощение, квадратично зависит от частоты.

Можно показать, что аналогичную квадратичную зависимость поглощения от частоты имеет также следующая **Модель 3**. Распространение волны в Модели 3 описывается дифференциальным уравнением

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)u_{ttt}-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t). \qquad (4.10)$$

Аналогично Модели 2 можно получить, что для уравнения (4.10) коэффициент поглощения имеет вид $b = 0.5\omega^2|a|c^{-0.5}$. Модель 3 также используется как модель поглощения ультразвуковых и акустических волн [81].

Таким образом, достоинством Моделей 1–3 является то, что они описывают как дифракционные явления распространения волн в неоднородных средах, так и эффекты поглощения. Модели 1 и 2, 3 существенно отличаются друг от друга. В Модели 1 частотный спектр сигнала не меняется при прохождении через поглощающую среду, в Моделях 2, 3 спектр сигнала меняется, поскольку коэффициент поглощения квадратично зависит от частоты ω.

4.3. Постановка обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных в моделях с поглощением. Вывод выражений для градиента

Волновые модели с поглощением, не зависящим от частоты

В настоящей главе предложены эффективные алгоритмы решения обратной задачи волновой томографии в средах с различными моделями поглощения. Рассмотрим волновое уравнение, которое описывает акустическое поле $u(r, t)$ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N = 2, 3$, ограниченной поверхностью S в течение времени $(0, T)$ с точечным источником, располагающимся в точке r_0.

Прямая задача (задача в прямом времени) в Модели 1 имеет следующий вид:

Модель 1

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)u_t-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t), \qquad (4.11)$$

$$u(r,t=0)=u_t(r,t=0)=0,\ \ \partial_n u|_{ST}=p(r,t). \qquad (4.12)$$

Здесь $\partial_n u|_{ST}$ – производная вдоль нормали к поверхности S в области $S\times(0,T)$, $p(r,\ t)$ – некоторая известная функция. Предполагается, что неоднородность среды вызвана изменениями скорости и поглощения, а вне области неоднородности скорость $c^{-0.5}(r)=v(r)\equiv v_0=const$, где v_0 – известна. $a(r)$ описывает поглощение в среде. Прямая задача заключается в расчёте волнового поля в области Ω, если в качестве источника излучения используется точечный источник. Условия (4.12) представляют собой граничные и начальные условия.

Обратная задача состоит в нахождении функций $c(r)$ и $a(r)$, описывающих неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,\ t)$ на границе S области за время $(0,\ T)$ при различных положениях r_0 источника. Функция $p(r,\ t)$ при решении обратной задачи может быть найдена по экспериментальным данным $U(s,\ t)$ на границе S из решения внешней для области Ω задачи. Более подробно этот вопрос обсуждается в параграфе 5.4.

Поставим обратную задачу как задачу минимизации квадратичного функционала

$$\Phi(u(c,a))=\frac{1}{2}\left\|u|_{ST}-U\right\|^2=\frac{1}{2}\int_0^T\int_S\left(u(s,t)-U(s,t)\right)^2 dsdt \qquad (4.13)$$

по функциям $c(r)$ и $a(r)$. Здесь $\|\cdot\|^2$ – квадрат нормы в пространстве L_2. Выпишем математическую задачу, позволяющую вычислить градиент функционала (4.13). Обозначим через ξ пару $\xi=(c,a)$, $u_\xi d\xi=u_c dc+u_a da$.

Найдём линейную относительно произвольной вариации $d\xi=(dc,da)$ часть приращения функционала (4.13):

$$d\Phi'(u(\xi),\xi)=\int_{ST}\left(u-U\right)(u_\xi d\xi)dsdt. \qquad (4.14)$$

Здесь u_ξ – производная по Фреше.

Поскольку $u(r,\ t)$ является решением задачи (4.11)–(4.12) при некотором $\xi(r)$ (т. е. $u(r,\ t)$ есть неявная функция от $\xi(r)$), то, взяв полную производную по $\xi(r)$ в (4.11), имеем

$$\begin{aligned} &c(r)(u_c dc + u_a da)_{tt} + a(r)\Delta(u_c dc + u_a da)_t - \\ &-\Delta(u_c dc + u_a da) + u_{tt}(r,t)dc + u_t(r,t)da = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Кроме того, вводя линейный оператор P ограничения функции на область $t=0$, имеем из (4.12), что $u(r,t=0) \equiv P(u(r,t)) = 0 = const$. Дифференцируя по $\xi(r)$, получим $\left(P(u(r,t))\right)'_\xi d\xi = P(u_\xi d\xi) = (u_\xi d\xi)(r,t=0) = 0$.

Аналогично из (4.12) получаем, что

$$(u_\xi d\xi)(r,t=0) = (u_\xi d\xi)_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n (u_\xi d\xi)|_{ST} = 0\,. \tag{4.16}$$

Таким образом, функция $(u_\xi d\xi)(r,t)$ при любой вариации $d\xi = (dc, da)$ является решением задачи (4.15)–(4.16). Введём оператор A: $Au = c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)u_t(r,t) - \Delta u(r,t)$.

Рассмотрим задачу, которую назовем «сопряжённой» к основной задаче (4.11)–(4.12):

$$Bw = c(r)w_{tt}(r,t) - a(r)w_t(r,t) - \Delta w(r,t) = 0, \tag{4.17}$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \;\; \partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U, \tag{4.18}$$

где u есть решение основной задачи (4.11)–(4.12). Обозначим $(u_\xi d\xi)(r,t) = \tilde{u}(r,t)$ для некоторой вариации $d\xi$. Рассмотрим скалярное произведение $(Bw, \tilde{u})$. Используя соотношения (4.16), (4.18) получим

$$\begin{aligned} 0 = (Bw, \tilde{u}) &= \int\limits_{\Omega T} (Bw)\tilde{u}drdt = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_{tt}(r,t)\tilde{u}(r,t)dtdr - \\ &-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} a(r)w_t(r,t)\tilde{u}(r,t)dtdr - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \Delta w(r,t)\tilde{u}(r,t)drdt = -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr + \\ &+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{S} \partial_n w(s,t)\tilde{u}(s,t)dsdt + \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt = \\ &= -\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T} a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \\ &- \int\limits_{ST} (u(s,t) - U(s,t))\tilde{u}(s,t)dsdt + \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{ST}(u(s,t)-U(s,t))\tilde{u}(s,t)dsdt=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+ \qquad (4.19)$$

$$+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Далее, рассмотрим скалярное произведение $\left(w, A\tilde{u}\right)$. Используя соотношения (4.12), (4.15) и (4.18), получим

$$\left(w, A\tilde{u}\right)=\int\limits_{\Omega T}w(r,t)A(\tilde{u}(r,t))drdt=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}\left[w(r,t)u_{tt}(r,t)dc(r)+w(r,t)u_t(r,t)da(r)\right]dtdr= \qquad (4.20)$$

$$=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}\left[w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)+w_t(r,t)u(r,t)da(r)\right]dtdr.$$

С другой стороны, используя соотношения (4.16) и (4.18), имеем

$$(w, A\tilde{u}=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w(r,t)c(r)\tilde{u}_{tt}dtdr+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}w(r,t)a(r)\tilde{u}_t(r,t)dtdr-$$

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}w(r,t)\Delta\tilde{u}(r,t)drdt=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{S}w(s,t)\partial_n\tilde{u}(s,t)dsdt+ \qquad (4.21)$$

$$+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt=-\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Из (4.20) и (4.21) получаем

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{T}\left[w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)+w_t(r,t)u(r,t)da(r)\right]dtdr=$$
$$=-\int_{\Omega}\int_{0}^{T}c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int_{\Omega}\int_{0}^{T}a(r)w(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+ \qquad (4.22)$$
$$+\int_{0}^{T}\int_{\Omega}\nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Тогда из (4.14), (4.19) и (4.22) имеем

$$d\Phi'(u(\xi),\xi)=\int_{ST}\left(u-U\right)(u_\xi d\xi)dsdt=$$
$$=\int_{\Omega}\left[w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)+w_t(r,t)u(r,t)da(r)\right]dtdr=$$
$$=\int_{\Omega}\left\{\left[\int_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dt\right]dc(r)+\left[\int_{0}^{T}w_t(r,t)u(r,t)dt\right]da(r)\right\}dr.$$

Выделяя линейные части по вариации dc и da, окончательно для градиента функционала $\Phi(u(\xi),\xi)$ имеем

$$\Phi'_c\ (u(c))=\int_{0}^{T}w_t(r,t)u_t(r,t)dt\ ,\ \Phi'_a\ (u(a))=\int_{0}^{T}w_t(r,t)u(r,t)dt\ . \quad (4.23)$$

Здесь $u(r,t)$ есть решение основной задачи (4.11)–(4.12), а $w(r,t)$ есть решение «сопряжённой» задачи (4.17)–(4.18) при заданных $c(r)$ и $a(r)$. Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и «сопряжённую» задачи.

Зная Φ'_c и Φ'_a из (4.23), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (4.13). В настоящей главе в численных методах использовался модернизированный метод наискорейшего спуска.

Волновые модели с поглощением, квадратично зависящим от частоты

Задача в прямом времени в Модели 2 имеет следующий вид

Модель 2

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)(\Delta u)_t-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t), \tag{4.24}$$

$$u(r,t=0)=u_t(r,t=0)=0,\ \partial_n u|_{ST}=p(r,t). \tag{4.25}$$

Будем предполагать, что вне области неоднородности скорость $c^{-0.5}(r)=v(r)\equiv v_0=\text{const}$ (v_0 известна), а в окрестности ограничивающей поверхности S

$$a(r)|_S=0. \tag{4.26}$$

В случае исследования объекта, помещённого в воду, в задаче УЗ диагностики в медицине можно считать выполненным условие $a(r)\equiv 0$ около границы, поскольку поглощение ультразвука в воде гораздо меньше, чем в тканях. Обратная задача состоит в нахождении функций $c(r)$ и $a(r)$, описывающих неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,t)$ на границе S области за время (0, T) при различных положениях r_0 источника.

Как и выше, в задаче 2 поставим обратную задачу как задачу минимизации квадратичного функционала (4.13). Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы. Вычисление выражения для градиента функционала невязки (4.13) в задаче 2 опишем кратко, поскольку оно в значительной степени аналогично задаче 1. Обозначим через ξ пару $\xi=(c,a)$, $u_\xi d\xi=u_c dc+u_a da$. Найдем линейную относительно произвольной вариации $d\xi=(dc,da)$ часть приращения функционала (4.13):

$$d\Phi'(u(\xi),\xi)=\int\limits_{ST}(u-U)(u_\xi d\xi)dsdt. \tag{4.27}$$

Здесь u_ξ – производная по Фреше. Поскольку $u(r,t)$ является решением задачи (4.24)–(4.25) при некотором $\xi(r)$ (т. е. $u(r,t)$ есть неявная функция от $\xi(r)$), то, взяв полную производную по $\xi(r)$ в (4.24), имеем

$$\begin{gathered}c(r)(u_c dc+u_a da)_{tt}+a(r)\Delta(u_c dc+u_a da)_t-\\-\Delta(u_c dc+u_a da)+u_{tt}(r,t)dc+\Delta u_t(r,t)da=0.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Аналогично (4.16) из (4.25) получаем, что

$$(u_\xi d\xi)(r,t=0)=(u_\xi d\xi)_t(r,t=0)=0,\ \partial_n(u_\xi d\xi)|_{ST}=0. \tag{4.29}$$

Таким образом, функция $(u_\xi d\xi)(r,t)$ при любой вариации $d\xi = (dc, da)$ является решением задачи (4.28)–(4.29). Введём оператор *A:* $Au = c(r)u_{tt}(r,t) + a(r)\Delta u_t(r,t) - \Delta u(r,t)$.

Рассмотрим задачу, которую назовём «сопряжённой» к основной задаче (4.24)–(4.25):

$$Bw = c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta\{a(r)w_t(r,t)\} - \Delta w(r,t) = 0, \tag{4.30}$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \ \ \partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U, \tag{4.31}$$

где *u* есть решение основной задачи (4.24)–(4.25). Рассмотрим скалярное произведение $(Bw, \ \tilde{u})$. Используя соотношения (4.26), (4.29) и (4.31), а также $\Delta w(r,t=T) = 0$, получим

$$\begin{gathered}
0 = (Bw, \tilde{u}) = \\
= -\int_\Omega\int_0^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \int_0^T\int_S \partial_n\{a(s)w_t(s,t)\}\tilde{u}(s,t)dsdt + \\
+ \int_0^T\int_\Omega \nabla\{a(r)w_t(r,t)\}\nabla\tilde{u}(r,t)drdt - \int_0^T\int_S \partial_n w(s,t)\tilde{u}(s,t)dsdt + \\
+ \int_0^T\int_\Omega \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt = -\int_\Omega\int_0^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr + \\
+ \int_0^T\int_\Omega \nabla\{a(r)w_t(r,t)\}\nabla\tilde{u}(r,t)drdt - \\
- \int_{ST} (u(s,t) - U(s,t))\tilde{u}(s,t)dsdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.
\end{gathered} \tag{4.32}$$

Используя соотношения (4.25), (4.28) и (4.31), а также $\Delta u(r,t=0) = 0$, получим

$$(w, A\tilde{u}) = \int_\Omega\int_0^T \left[w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r) + w_t(r,t)\Delta u(r,t)da(r)\right]dtdr. \tag{4.33}$$

С другой стороны, используя соотношения (4.26), (4.29) и (4.31), имеем

$$(w, A\tilde{u}) = -\int_\Omega\int_0^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr - \int_\Omega\int_0^T a(r)w_t(r,t)\Delta\tilde{u}(r,t)dtdr -$$

$$-\int_0^T\int_S w(s,t)\partial_n\tilde{u}(s,t)dsdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt=$$

$$=-\int_\Omega\int_0^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int_\Omega\int_0^T \nabla\left\{a(r)w_t(r,t)\right\}\nabla\tilde{u}(r,t)dtdr+ \quad (4.34)$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Из (4.33) и (4.34) получаем

$$\int_\Omega\int_0^T\left[w_t(r,t)u_t(r,t)dc(r)+w_t(r,t)\Delta u(r,t)da(r)\right]dtdr=$$

$$=-\int_\Omega\int_0^T c(r)w_t(r,t)\tilde{u}_t(r,t)dtdr+\int_\Omega\int_0^T \nabla\left\{a(r)w_t(r,t)\right\}\nabla\tilde{u}(r,t)dtdr+ \quad (4.35)$$

$$+\int_0^T\int_\Omega \nabla w(r,t)\nabla\tilde{u}(r,t)drdt.$$

Тогда из (4.27), (4.32) и (4.35) имеем

$$d\Phi'(u(\xi))=\int_{ST}\left(u-U\right)(u_\xi d\xi)dsdt=$$

$$=\int_\Omega\left\{\left[\int_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dt\right]dc(r)+\left[\int_0^T w_t(r,t)\Delta u(r,t)dt\right]da(r)\right\}dr.$$

Окончательно для градиента функционала $\Phi(u(\xi))$ имеем

$$\Phi'_c(u(c))=\int_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dt,\ \ \Phi'_a(u(a))=\int_0^T w_t(r,t)\Delta u(r,t)dt. \quad (4.36)$$

Здесь $u(r, t)$ есть решение основной задачи (4.24)–(4.25), а $w(r, t)$ есть решение «сопряженной» задачи (4.30)–(4.31) при заданных $c(r)$ и $a(r)$.

Задача в прямом времени в Модели 3 имеет следующий вид

Модель 3

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)u_{ttt}-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t),$$

$$u(r,t=0)=u_t(r,t=0)=u_{tt}(r,t=0)=0,\ \partial_n u|_{ST}=p(r,t).$$

Сопряжённая задача имеет вид

$$Bw=c(r)w_{tt}(r,t)-a(r)w_{ttt}(r,t)-\Delta w(r,t)=0,$$

$$w(r,t=T)=w_t(r,t=T)=w_{tt}(r,t=T)=0,\ \partial_n w|_{ST}=u|_{ST}-U.$$

Нетрудно получить выражение для градиента функционала невязки (4.13) для решения обратной задачи в Модели 3:

$$\Phi'_c\ (u(c))=\int_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dt,\ \ \Phi'_a\ (u(a))=\int_0^T w_t(r,t)u_{tt}(r,t)dt.$$

Таким образом, в каждой из Моделей 1–3 в явном виде выписано выражение для градиента функционала невязки. Зная градиент, можно предложить различные итерационные методы минимизации функционала невязки. В качестве базового метода для решения обратных задач использовался модифицированный вариант метода наискорейшего спуска, подробно описанный ниже.

4.4. Численные алгоритмы решения обратных задач волновой томографии как коэффициентных задач для уравнения в частных производных в моделях с поглощением

Для решения обратной задачи в Модели 1 будем использовать метод конечных разностей. На области изменения аргументов введём равномерную дискретную сетку $v_{ijk}=\{(x_i,y_j,t_k):x_i=ih,\ 0\le i<n;\ y_j=jh,\ 0\le j<n;\ t_k=k\tau,\ 0\le k<m\}$, где h – шаг сетки по горизонтальным координатам, τ – шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau<h/\sqrt{2}$. Параметры n, m задают количество точек сетки по горизонтальным координатам и времени.

Используем следующую разностную аппроксимацию уравнения (4.11) 2-го порядка точности в области, не содержащей источников

$$c_{ij}\frac{u_{ij}^{k+1}-2u_{ij}^{k}+u_{ij}^{k-1}}{\tau^2}+a_{ij}\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k-1}}{\tau}-\frac{u_{i+1j}^{k}-2u_{ij}^{k}+u_{i-1j}^{k}}{h^2}-\frac{u_{ij+1}^{k}-2u_{ij}^{k}+u_{ij-1}^{k}}{h^2}=0,$$

где первое слагаемое аппроксимирует $c(r)u_{tt}(r,t)$, второе – $a(r)u_t(r,t)$, а третье: $-\Delta u(r,t)$.

Здесь u_{ij}^{k} – значения $u(r,t)$ в точке (x_i, y_j) в момент времени t_k, c_{ij} и a_{ij} – значения $c(r)$ и $a(r)$ в точке (x_i, y_j) соответственно. Выделяя член u_{ij}^{k+1}, получаем явную разностную схему по временным слоям для расчёта распространения звуковой волны (расчёт «в прямом времени») для уравнения (4.11):

$$u_{ij}^{k+1} = \left(2\left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2}{h^2} \right) u_{ij}^{k} + \frac{u_{i+1j}^{k} + u_{i-1j}^{k} + u_{ij+1}^{k} + u_{ij-1}^{k}}{h^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a_{ij}}{2\tau} - \frac{c_{ij}}{\tau^2} \right) u_{ij}^{k-1} \right) \left(\frac{a_{ij}}{2\tau} - \frac{c_{ij}}{\tau^2} \right)^{-1}. \qquad (4.37)$$

В качестве граничных условий для модельных расчётов в настоящей главе выбиралось условие неотражения на границе [64]

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5} \partial_t \mathrm{u}|_{ST},$$

которое в разностной аппроксимации имеет вид

$$\frac{\left(u_{i+1j}^{k} - u_{i-1j}^{k} \right)}{2h} = \pm \frac{\left(u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1} \right)}{c_{ij}^{0.5} 2\tau} \quad \text{для } i = 1 \text{ или } n-2.$$

Аналогично по индексу j для $j = 1$ или $n - 2$.

В модельных расчётах исследуемая область окружена однородной средой (рис. 4.1), в которой процесс распространения зондирующего импульса хорошо известен, что позволяет вычислить $u(r, t)$ и $u_t(r, t)$ при малом t. Зондирующий импульс задаётся в некоторый момент времени $t_1 > 0$ в виде радиально распространяющейся волны в среде L по формуле

$$\begin{cases} u(r,t_1) = K \exp(\alpha(r - R_0)) \sin\left(\dfrac{4\pi(r - R_0)}{c_0 T} \right), & \text{при } R_0 - c_0 T < r < R_0 \\ u(r) = 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (4.38)$$

где r – расстояние от текущей точки до источника импульса, T – длительность импульса по времени, c_0 – скорость волны в среде L, R_0 – расстояние от переднего фронта волны до источника импульса, K – амплитуда импульса, $\alpha > 0$ задаёт крутизну огибающей импульса. Параметры, задающие импульс в модельных расчётах, выбирались таким образом, чтобы центральная частота примерно равнялась 300 кГц: $\alpha = 0.45$, $R_0 = 10$ мм, $c_0 = 1500$ м/с, $T = 6.66$ мкс.

Аналогично (с учётом замены знака перед a) выписывается разностная схема для $w(r, t)$ в обратном времени. В сопряжённой задаче волна также поглощается. Решение находится по временным слоям в явной форме. Градиент (4.23) функционала (4.13) вычислялся по разностной формуле

$$\operatorname{grad} C_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k}}{\tau} \tau, \ \operatorname{grad} A_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} u_{ij}^{k} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k-1}}{\tau} \tau, \quad (4.39)$$

где $\operatorname{grad} C_{ij}$ – градиент в точке (x_i, y_j) по c, а $\operatorname{grad} A_{ij}$ – градиент в точке (x_i, y_j) по a.

Невязка для одного положения источника вычисляется по формуле:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \sum_{(i,j) \in S} (u_{ij}^{k} - U_{ij}^{k})^2 h\tau. \quad (4.40)$$

Здесь S – граница, U_{ij}^{k} – значения $U(r, t)$ в точке (x_i, y_j) на границе S в момент времени t_k.

Для проведения модельных расчётов был использован следующий итерационный процесс.

В качестве начального приближения выбирается значение $c^{(0)} = c_0 = const$, соответствующее скорости звука в чистой воде 1.5 км/с и $a^{(0)} = const = 0$.

На каждой итерации (p) выполняются следующие действия:

Расчёт начального импульса источника с использованием формулы (4.38).

1. Решение прямой задачи (4.11)–(4.12) для текущего итерационного приближения $\left(c^{(p)}, a^{(p)}\right)$. Расчёт распространения ультразвуковой волны $u^{(p)}(r, t)$ выполняется по формуле (4.37). Вычисляются значения $u(r, t)$ на каждом из детекторов.

2. Вычисление невязки $F^{(p)} = F(u^{(p)}(r, t))$ по формуле (4.40).

3. Решение сопряжённой задачи (4.17)–(4.18) для $w^{(p)}(r, t)$.

4. Вычисление градиента ($\operatorname{grad} C^{(p)}$, $\operatorname{grad} A^{(p)}$) по формуле (4.39) для всех источников.

5. Коррекция текущего приближения $c^{(p+1)} = c^{(p)} + \gamma^{(p)} \operatorname{grad} C^{(p)}$, $a^{(p+1)} = a^{(p)} + \gamma^{(p)} \operatorname{grad} A^{(p)}$. Процесс возвращается к пункту 1.

Итерационный процесс останавливается либо если невязка становится меньше заданной величины, которая соответствует известной априори погрешности входных данных, либо при достижении заданного минимального значения скорости убывания невязки.

Начальный шаг метода градиентного спуска $\gamma^{(0)}$ выбирается из априорных соображений. Для более точного определения шага для наискорейшего спуска потребовалось бы выполнять дополнительные итерации, что увеличило бы время расчётов в 2 и более раз. Если невязка $F^{(p)}$ на следующей итерации оказывается больше $F^{(p-1)}$, шаг $\gamma^{(p)}$ уменьшается в 1.5 раза.

Далее, выпишем разностную схему для уравнения (4.24) в Модели 2. Мы использовали четырёхслойную по времени схему, которая обеспечила получение устойчивого решения волнового уравнения с поглощением (4.24). Для слагаемых $c(r)u_{tt}(r,t)-\Delta u(r,t)$ разностная аппроксимация использовалась такая же, как и выше. Для слагаемого $a(r)(\Delta u)_t$ предложена следующая схема:

$$\frac{a_{ij}}{\tau h^2}\Big[\Big(u_{i+1j}^k-u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k-1}+u_{i-1j}^k+u_{ij+1}^k-u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k-1}+u_{ij-1}^k\Big)-$$
$$-\Big(u_{i+1j}^{k-1}-u_{ij}^k-u_{ij}^{k-2}+u_{i-1j}^{k-1}+u_{ij+1}^{k-1}-u_{ij}^k-u_{ij}^{k-2}+u_{ij-1}^{k-1}\Big)\Big].$$

Выделяя член u_{ij}^{k+1}, получаем явную разностную схему по временным слоям для расчёта распространения звуковой волны (расчёт «в прямом времени») для уравнения (4.24):

$$u_{ij}^{k+1}=\left(\frac{c_{ij}}{\tau^2}-\frac{2a_{ij}}{\tau h^2}\right)^{-1}\Bigg[\frac{c_{ij}}{\tau^2}\Big(2u_{ij}^k-u_{ij}^{k-1}\Big)-\frac{a_{ij}}{\tau h^2}\Big\{\Big(u_{i+1j}^k-2u_{ij}^{k-1}+u_{i-1j}^k+u_{ij+1}^k+u_{ij-1}^k\Big)-$$
$$-\Big(u_{i+1j}^{k-1}-2u_{ij}^k-2u_{ij}^{k-2}+u_{i-1j}^{k-1}+u_{ij+1}^{k-1}+u_{ij-1}^{k-1}\Big)\Big\}+\frac{1}{h^2}\Big(u_{i+1j}^k+u_{i-1j}^k+u_{ij+1}^k+u_{ij-1}^k-4u_{ij}^k\Big).$$

Сопряжённая задача описывается уравнением (4.30). Для аппроксимации слагаемого $\Delta\{a(r)w_t(r,t)\}$ предложена следующая схема:

$$\frac{1}{\tau h^2}\Big[a_{i+1j}\Big(w_{i+1j}^{k+1}-w_{i+1j}^k\Big)-a_{ij}\Big\{\Big(w_{ij}^{k+2}+w_{ij}^k\Big)-\Big(w_{ij}^{k-1}+w_{ij}^{k+1}\Big)\Big\}+$$
$$+a_{i-1j}\Big(w_{i-1j}^{k+1}-w_{i-1j}^k\Big)+a_{ij+1}\Big(w_{ij+1}^{k+1}-w_{ij+1}^k\Big)-$$
$$-a_{ij}\Big\{\Big(w_{ij}^{k+2}+w_{ij}^k\Big)-\Big(w_{ij}^{k-1}+w_{ij}^{k+1}\Big)\Big\}+a_{ij-1}\Big(w_{ij-1}^{k+1}-w_{ij-1}^k\Big)\Big].$$

Разностная схема для волны $w(r, t)$ в сопряжённой задаче выписывается в следующей явной форме по временным слоям в обратном времени

$$w_{ij}^{k-1} = \left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2a_{ij}}{\tau h^2}\right)^{-1} \left[\frac{c_{ij}}{\tau^2}\left(2w_{ij}^{k} - w_{ij}^{k+1}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{\tau h^2}\left[a_{i+1j}\left(w_{i+1j}^{k+1} - w_{i+1j}^{k}\right) + a_{i-1j}\left(w_{i-1j}^{k+1} - w_{i-1j}^{k}\right) + \right.$$

$$\left. + a_{ij+1}\left(w_{ij+1}^{k+1} - w_{ij+1}^{k}\right) - 2a_{ij}\left(w_{ij}^{k+2} + w_{ij}^{k} - w_{ij}^{k+1}\right) + a_{ij-1}\left(w_{ij-1}^{k+1} - w_{ij-1}^{k}\right)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{h^2}\left(w_{i+1j}^{k} + w_{i-1j}^{k} + w_{ij+1}^{k} + w_{ij-1}^{k} - 4w_{ij}^{k}\right).\right.$$

Градиент (4.36) функционала невязки вычислялся по разностной формуле

$$\operatorname{grad} C_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k}}{\tau} \tau,$$

$$\operatorname{grad} A_{ij} = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{u_{i+1j}^{k} + u_{i-1j}^{k} + u_{ij+1}^{k} + u_{ij-1}^{k} - 4u_{ij}^{k}}{h^2} \frac{w_{ij}^{k+1} - w_{ij}^{k-1}}{\tau} \tau,$$

где $\operatorname{grad} C_{ij}$ – градиент в точке (x_i, y_j) по c, а $\operatorname{grad} A_{ij}$ – градиент в точке (x_i, y_j) по a. Все остальные вычисления и итерационный процесс выполняются аналогично описанному выше для Модели 1.

4.5. Модельные расчёты обратных задач волновой томографии с учётом поглощения на суперЭВМ на процессорах общего назначения

Используя явное представление для градиента функционала невязки для Моделей 1–3, можно предложить эффективные итерационные процедуры восстановления $c(r)$ и $a(r)$. Полученные представления для градиента невязки позволяют решать обратную задачу как в 2D, так и в 3D варианте. В настоящей главе рассматриваются двумерные задачи волновой томографии, трёхмерный случай рассмотрен в главе 5. Для расчётов использовались математические модели с поглощением, описываемые уравнениями (4.11), (4.24) в Моделях 1–2.

В силу большого объёма вычислений наиболее эффективно рассматриваемые обратные задачи решаются с использованием суперкомпьютеров.

Суперкомпьютеры позволяют решать задачи на сетке до нескольких тысяч точек по каждой координате в восстанавливаемом слое, в настоящей работе моделирование проводилось на равномерной расчётной сетке 500×500 точек. Модельные расчёты были выполнены на суперкомпьютере «Ломоносов» МГУ.

Приведём некоторые характеристики суперкомпьютера «Ломоносов». Суперкомпьютер имеет пиковую производительность 1.7 PFlops, включает в себя 52000 вычислительных ядер на процессорах общего назначения. Наша программа написана с помощью технологии MPI. Для модельных расчётов использовалось небольшое количество ядер, равное 256, что позволяет уменьшить время расчётов в ~100 раз по сравнению с расчётами на одном ядре. Время расчёта 500 итераций модифицированного алгоритма наискорейшего спуска составило около 3.5 часов. В задачи с 64 источниками на сетке 500×500 эффективное распараллеливание возможно и при большем количестве ядер. Так, при 2000 ядер ускорение составит около 1000 раз. При решении реальных задач на GPU суперкомпьютерах время расчётов может составлять ~0.5 ч.

Модельные расчёты ориентированы в первую очередь на разработку ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы. На рис. 4.1 приведена схема эксперимента, источники обозначены цифрой 1, приёмники – 2. Источники расположены по сторонам области расчётов через равные интервалы, приёмники излучения расположены также по периметру области расчётов с шагом ~ не более

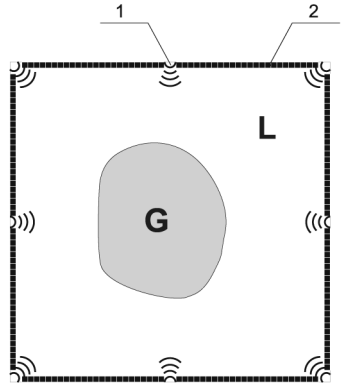
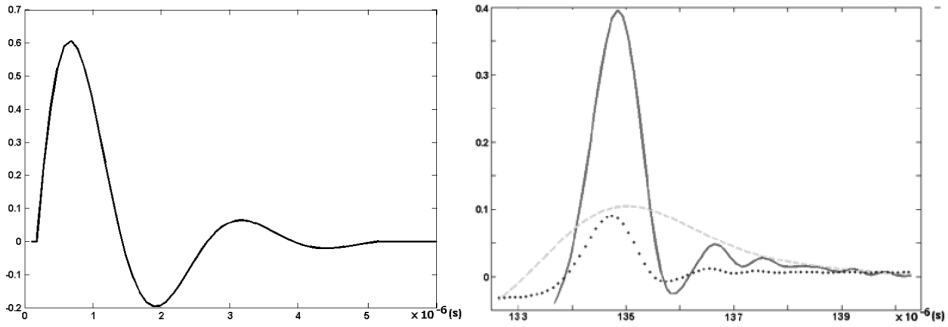


Рис. 4.1. Схема расположения источников и приемников в модельном эксперименте

$\lambda/3$, где λ – длина волны центральной частоты импульса. Это типичный размер трансдьюсеров. Особенностью использования таких трансдьюсеров является их широкая диаграмма направленности. Исследуемая область G, содержащая неоднородности, расположена в центре квадрата расчётной области и окружена непоглощающей средой L с известной скоростью $v_0 = 1500$ м/с.

Экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 2D объекте с модельными неоднородностями. В модельных расчётах для Моделей 1–2 использовались одинаковые сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны $v(x, y)$ в исследуемом объекте. Минимальный размер неоднородности 3 мм. Вариация скорости $c(x, y)$ не превышала 10–20 %. Вариация коэффициента поглощения $a(x, y)$ в пределах объекта не превышала 50 %. Амплитуда волны при учете поглощения падает примерно в 3 раза. Выбранные диапазоны вариации параметров соответствуют диапазонам изменения в мягких тканях человека [73].

В ходе модельных расчётов с использованием численных методов в разностной аппроксимации решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны. На рис. 4.2, *а* приведена форма зондирующего импульса как функция от времени. Импульс локализован, имеет широкий спектр с центральной частотой 300 кГц. На рис. 4.2, *б* приведены регистрируемые на одном из трансдьюсеров сигналы как функции от



а *б*

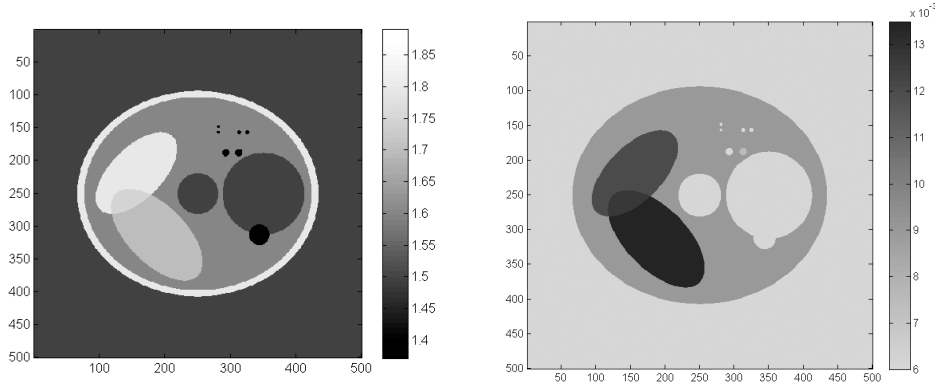
Рис. 4.2, *а* – форма зондирующего импульса; *б* – регистрируемые сигналы на одном из трансдьюсеров. Модель без поглощения – сплошная линия, Модель 1 – линия из точек, Модель 2 – пунктир

времени, рассчитанные в Моделях 1–2 после прохождения через объект. Сплошная линия соответствует волне, прошедшей через среду без поглощения, точки – волна с учётом поглощения в Модели 1 и пунктир – волна с учётом поглощения в Модели 2. Видно, что амплитуда волны при учёте поглощения падает примерно в 3 раза. В Модели 2 частотный спектр волны содержит в основном низкие частоты, в Модели 1 спектр частот по сравнению с исходной волной не изменился, что связано с характером поглощения, не зависящим от частоты.

По полученным данным без внесения дополнительного шума решалась обратная задача. Параметры расчётной модели: длина волны излучения 5.0 мм; шаг регистрации сигналов по пространству 2.0 мм; размер области ультразвукового зондирования по горизонтали 200×200 мм.

Для решения обратной задачи использовался итерационный процесс с начального приближения $c(r) = \text{const} = c_0$ – известной вне области неоднородности. При наличии поглощения начальное приближение для поглощения выбиралось $a(r) = \text{const} = 0$. Итерационные значения скорости и поглощения на каждой итерации ограничивались в диапазонах, заведомо включающих в себя искомые функции скорости и поглощения. Расчёты проводились для 64 источников излучения.

На рис. 4.3 для Модели 1 приведены модельные сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны $v(x, y)$ в исследуемом объекте (слева) и функции поглощения ультразвуковой волны $a(x, y)$ (справа) как функции от x, y.



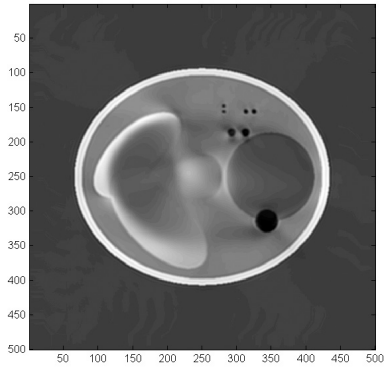
а *б*

Рис. 4.3. Модельные изображения в Модели 1:
а – скоростного разреза $v(r)$ и *б* – поглощения $a(r)$

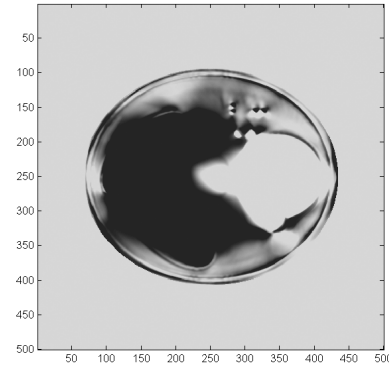
На рис. 4.4, 4.5 приведены результаты восстановления функции $v(x, y)$ в рамках Модели 1 через 500 и 3500 итераций.

На рис. 4.6 для Модели 2 приведены модельные сечения функции скорости распространения ультразвуковой волны $v(x, y)$ в исследуемом объекте (слева) и функции поглощения ультразвуковой волны $a(x, y)$ (справа) как функции от x, y.

На рис. 4.7, 4.8 приведены результаты восстановления функции $v(x, y)$ в рамках Модели 2 через 500 и 3500 итераций. Видно, что в обеих моделях с поглощением удаётся восстановить одновременно две неизвестные

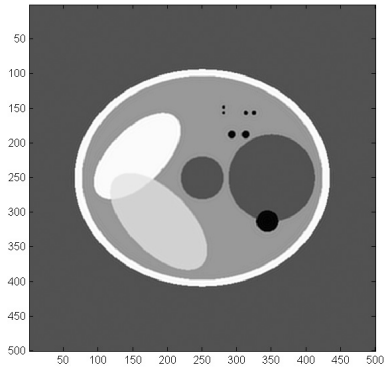


а

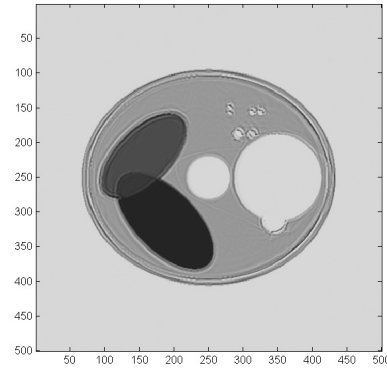


б

Рис. 4.4. Реконструированное изображение через 500 итераций в Модели 1: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$

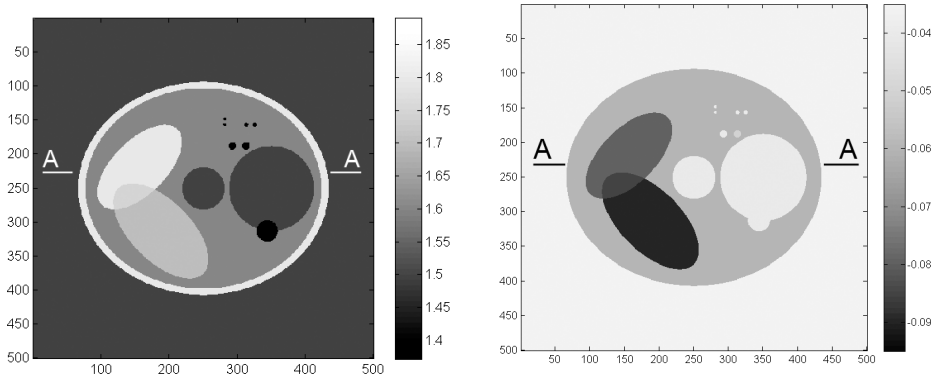


а



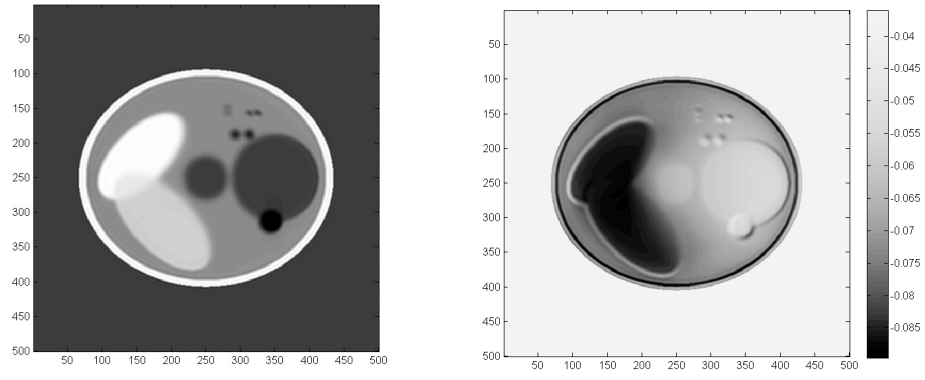
б

Рис. 4.5. Реконструированное изображение через 3500 итераций в Модели 1: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$



а *б*

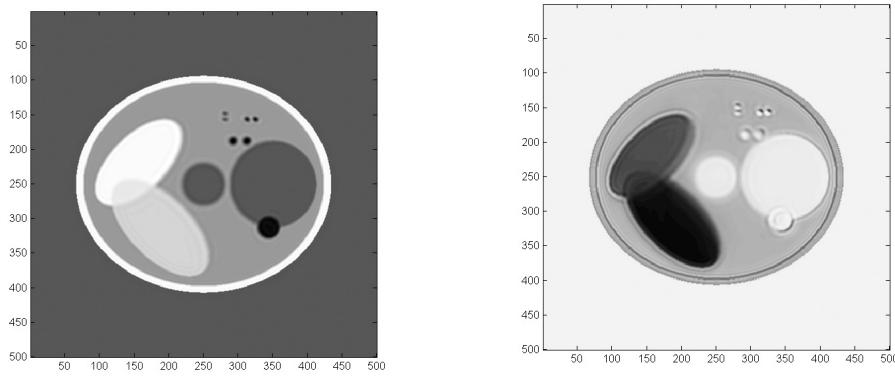
Рис. 4.6. Модельные изображения в Модели 2:
а – скоростного разреза $v(r)$; *б* – поглошения $a(r)$



а *б*

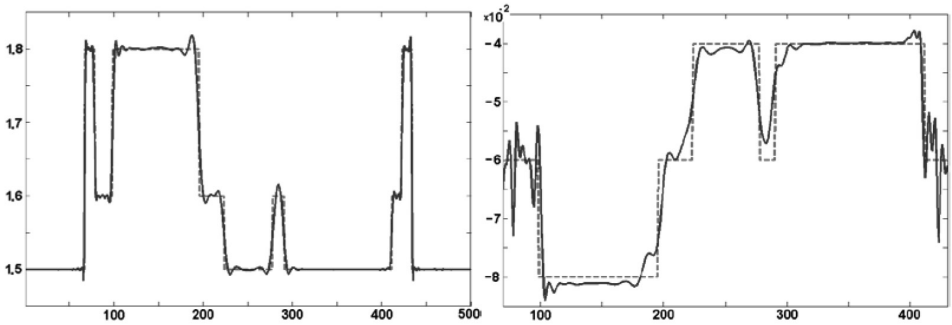
Рис. 4.7. Реконструированное изображение через 500 итераций в Модели 2:
а – $v(r)$; *б* – $a(r)$

функции – скорость и поглощение. Хотя Модели 1 и 2 трудно сравнивать из-за разного характера поглощения, однако авторам не удалось почувствовать из решения модельных задач, существует ли разница в восстановлении функции, описывающей поглощение между Моделями 1 и 2. Тем не менее отчётливо можно утверждать, что функция скорости при заданных параметрах восстанавливается за меньшее число итераций и с более высоким качеством, чем функция поглощения.



а *б*

Рис. 4.8. Реконструированное изображение через 3500 итераций в Модели 2: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$



а *б*

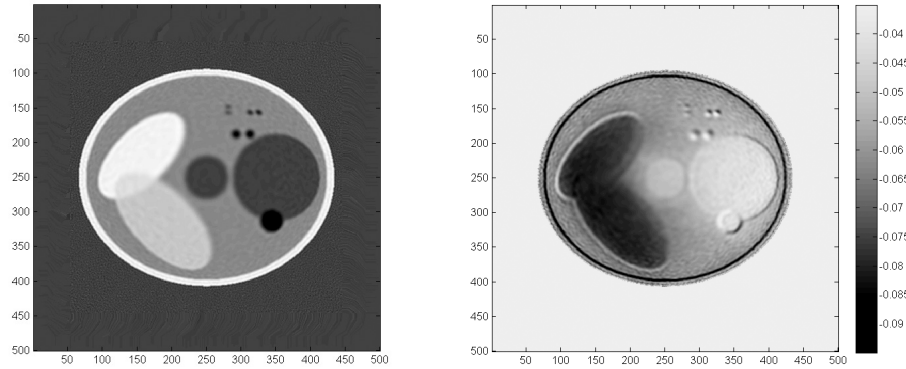
Рис. 4.9. График точного (пунктир) и восстановленного (сплошная) сечения вдоль линии АА на рис. 4.6 для Модели 2 через 3500 итераций: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$

Тот же факт, что функция скорости восстанавливается с более высоким качеством, чем функция поглощения, виден, например, из рис. 4.9, где изображены графики точного и восстановленного сечений вдоль линии АА на рис. 4.6 для скорости (*а*) и поглощения (*б*).

На рис. 4.10 приведены результаты реконструкции через 500 итераций в Модели 2 при добавлении нормально распределённого случайного шума со стандартным отклонением, равным 0.02, что соответствует уровню 10 % от амплитуды прошедшей волны. Через 500 итераций был достигнут уровень среднеквадратичного отклонения 0.000396, что хорошо

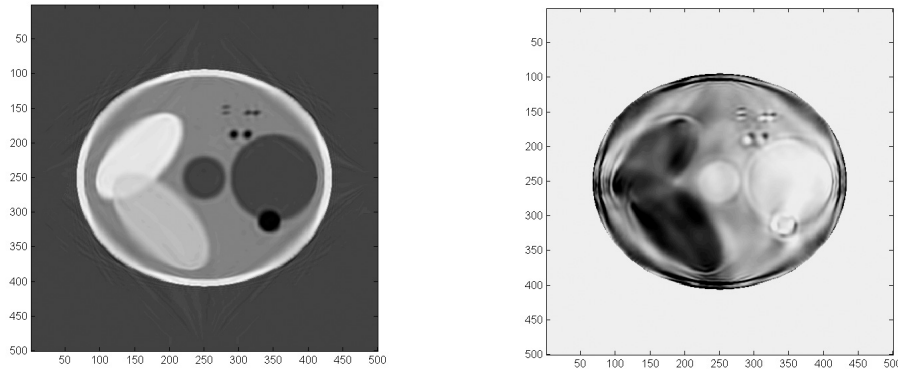
согласуется с дисперсией добавленного шума, равной 0.0004. Как видно из рис. 4.10, скорость по-прежнему восстанавливается лучше, чем поглощение. Даже при достаточно высоком уровне шума качество реконструкции скорости – высокое.

Может создаться впечатление, что 500 итераций представляет собой достаточно большое число. Это не совсем так. Как известно, рекордсменом в этой области является метод сопряжённых градиентов, который минимизирует квадратичный функционал за n итераций, где n – число



а *б*

Рис. 4.10. Реконструированное изображение в Модели 2 с 10 % шумом через 500 итераций: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$



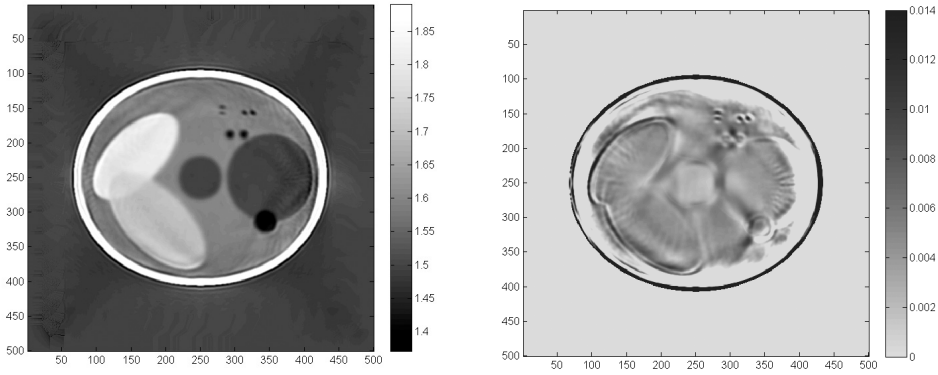
а *б*

Рис. 4.11. Реконструированное изображение в Модели 2 с шумом 0 %, 4 источника через 5000 итераций: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$

неизвестных. В нашей задаче число неизвестных равняется 500000. Рассматриваемая задача, кроме того, является нелинейной. Использование суперкомпьютеров позволяет, как уже отмечалось, сократить время расчётов в сотни раз.

Из рис. 4.11 следует, что уменьшение числа источников до 4 (по сравнению с 64) также сильнее сказывается на реконструкции поглощения, качество которого становится низким.

Исследуем вопрос, так ли важно, какая используется модель поглощения. Оказывается, что если модель не та, то поглощение вообще не удаётся восстановить. Однако скорость восстанавливается неплохо. Это видно из рис. 4.12, где реконструировались $v(r)$ и $a(r)$ на основе Модели 1 по



а *б*

Рис. 4.12. Изображение, реконструированное с учётом поглощения на основе Модели 1 по данным, полученным из Модели 2, 400 итераций: *а* – $v(r)$; *б* – $a(r)$

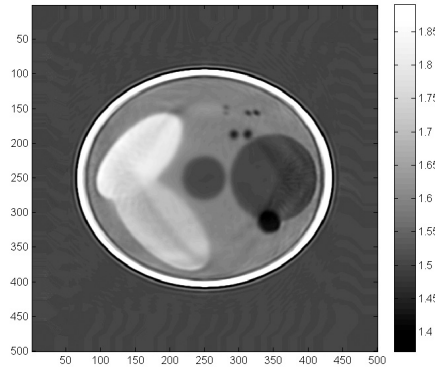


Рис. 4.13. Изображение $v(r)$, реконструированное на основе модели без учёта поглощения по данным, полученным из Модели 2, 500 итераций

данным, полученным из Модели 2. Более того, при небольшом поглощении можно пытаться восстанавливать скорость, даже если вообще не учитывать поглощение. Это следует из рис. 4.13, где восстанавливалась скорость на основе модели без поглощения по данным, также полученным из Модели 2.

При решении некорректно поставленных задач важной проблемой является построение алгоритмов, позволяющих получить приближённое решение при разных уровнях ошибки входных данных. В главе приведён лишь один из расчётов большого числа модельных задач в случае, когда ошибка на детекторах генерировалась случайным образом (рис. 4.10). Реально кроме ошибки входных данных на детекторах мы всегда имеем ту или иную степень несоответствия модели реальной физической ситуации. С математической точки зрения можно трактовать это как ошибку в операторе, если обратная задача трактуется как операторное уравнение 1 рода. Какая из ошибок больше влияет на точность реконструкции? С математической точки зрения теория решения некорректно поставленных задач даёт только возможность построения приближённого решения, когда обе эти ошибки стремятся к нулю. Наиболее интересная для авторов проблема заключалась в том, чтобы выяснить, насколько устойчивы результаты относительно неопределённости модели. Выяснилось, что скоростной разрез восстанавливается лучше, чем функции, характеризующие поглощение. Реконструкция скоростного разреза достаточно устойчива к неопределённости в модели поглощения.

Когда авторы книги приступали к модельным расчётам, мы хотели продемонстрировать, что в реальных задачах, где поглощение имеет место, абсолютно бесполезно пытаться решать обратную задачу в моделях без поглощения. Результаты модельных расчётов, приведённые на рис. 4.12 и 4.13, показывают, что ситуация не настолько плохая, как нам казалось. Даже при наличии вполне значимого поглощения, реконструированный в модели без поглощения скоростной разрез достаточно хорошо соответствует точному решению. Конечно, полученный результат нельзя сравнить с идеальной картинкой, полученной в соответствующей модели с поглощением. Тем не менее тот факт, что реконструкция скоростного разреза не так сильно зависит от модели поглощения, обнадёживает.

На физическом уровне строгости этот факт можно попытаться объяснить тем, что функционал невязки больше зависит от вариации скорости, чем от вариации коэффициентов в модели поглощения. Представим себе,

что зондировании осуществляется для простоты очень короткими импульсами. Тогда даже при небольших вариациях скорости зарегистрированный сигнал на детекторе и его дубликат в возмущённом варианте из-за задержки по времени прихода будут ортогональны в L_2, если их носители не пересекаются. Если мы изменили коэффициент поглощения в модели, то приходящий сигнал на детекторе изменится только по амплитуде.

4.6. Выводы

В главе 4 приведены эффективные методы решения обратных задач волновой томографии в моделях с поглощением в дифференциальном подходе. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача относительно неизвестных функций, характеризующих как скоростной разрез, так и поглощение в диагностируемой области. Основное отличие рассмотренных моделей заключается в зависимости поглощения от частоты зондирующего излучения. В Модели 1, в отличие от Модели 2, частотный состав зондирующего сигнала при прохождении через среду не меняется. Выбор модели поглощения, прежде всего, определяется физикой процессов поглощения.

В Моделях 1–2 получены точные выражения градиента функционала невязки как по функции скорости, так и по поглощению. Это позволяет строить эффективные итерационные алгоритмы минимизации функционала невязки. В рассматриваемой постановке не требуется искусственно разделять задачу на две подзадачи: поиска функции скорости, а затем функции поглощения, проводить реализацию алгоритмов поэтапно. В предлагаемой постановке ищется одновременно две функции.

Все расчёты модельных задач проводились на процессорах общего назначения суперкомпьютера «Ломоносов», который позволяет использовать для решения задачи вплоть до 52000 ядер. Использование суперкомпьютеров такого типа перспективно на этапе разработки алгоритмов, моделирования томографов.

Модельные расчёты показали, что при небольших погрешностях входных данных можно восстанавливать не только скоростной разрез, но и функцию поглощения. Каким образом этот факт согласуется с тем, что в рентгеновской томографии по стандартным томографическим данным восстанавливается только одна функция? Дело в том, что, в отличие от рентгеновской томографии, в волновой томографии каждый детектор

измеряет сигнал, представляющий собой не одно число, а одномерную функцию от времени.

В обеих моделях с поглощением скоростной разрез восстанавливается лучше, чем коэффициенты $a(r)$, характеризующие поглощения. Один из результатов, заключающийся в том, что восстановление скоростного разреза не так уж сильно зависит от модели поглощения, позволяет оптимистично оценивать потенциальные возможности УЗ томографов для медицинских целей для определения неоднородностей по скорости распространения акустической волны. Для одновременного определения неоднородностей, характеризующих поглощение, необходимо использовать математические модели, адекватно описывающие физические процессы поглощения.

Спецификой рассматриваемых задач УЗ томографии является то, что УЗ характеристики молочной железы мало отличаются для здоровых и для поражённых раком тканей, что усложняет их обнаружение. Поэтому дополнительная информация о распределении поглощающих свойств исследуемой области увеличивает достоверность результатов. Как правило, поглощение звука в злокачественном образовании выше, чем в окружающих тканях.

4.7. Задачи математического практикума к главе 4

Распространение и фокусировка импульса волны в неоднородной среде с поглощением

Задача № 1

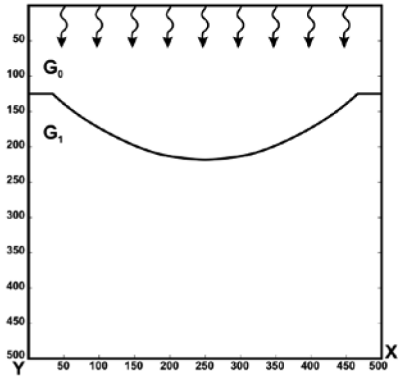


Рис. 4.14. Фантом неоднородной среды из двух сред с фокусирующей линзой на границе

В задачах необходимо вычислить распространение с течением времени плоского импульса в неоднородной среде, приведённой на рис. 4.14, состоящей из области G_0 и G_1. Наличие линзы на границе раздела сред приводит к фокусировке отраженной и проходящей волн. Среда G_1 дополнительно обладает поглощением, что приводит к затуханию волны.

Плоский волновой импульс падает сверху. В начальный момент времени $t = 0$ и в момент $t = \tau$ импульс находится полностью в среде G_0 и описывается формулой (3.20)

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \exp(\alpha(y - v_0 t - Y_0))\sin\left(\dfrac{4\pi(y - v_0 t - Y_0)}{v_0\Theta}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } Y_0 - v_0\Theta < r < y - v_0 t - Y_0 \\ u(x,y,t) = 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

где Θ – длительность импульса по времени, v_0 – скорость волны в среде G_0, Y_0 – определяет положение переднего фронта волны импульса в момент времени t, $\alpha > 0$ – параметр.

Выполните следующие операции:

1. Составьте программу, которая задаёт скорость в двухкомпонентной среде с линзой на границе раздела сред. Изображение фантома представлено на рис. 4.14. Скорость задаётся на сетке

$$\left\{(x_i, y_j) : x_i = ih, \quad 1 \le i \le Nx; \quad y_j = jh, \quad 1 \le j \le Ny\right\}$$

($Nx = 502$, $Ny = 502$). Размер области 200×200 мм. Область G_1 задаётся из условий

$$(y - 87{,}5 \text{ мм} > -0.005(x - 100 \text{ мм})^2) \cap (y > 50 \text{ мм}).$$

В области G_1 скорость положить равной $v_1 = 2700$ м/сек, коэффициент поглощения $a = 0.005$, в области G_0 скорость положить равной $v_0 = 1500$ м/сек, поглощение отсутствует ($a = 0$).

2. Задайте граничные условия на левой и правой границах в виде

$u(1, j, k) = u(2, j, k)$ и $u(Nx, j, k) = u(Nx-1, j, k)$ для $j = 1...Ny$, $k = 1...Nt$.

3. Задайте граничные условия на верхней и нижней границах в виде

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5}\partial_t u|_{ST}.$$

В разностной аппроксимации граничные условия на верхней границе принимают вид

$$v_0\,(u(i, 1, k) - u(i, 2, k))/h = -\,(u(i, 1, k + 1) - u(i, 1, k))/\tau \text{ для } i = 1...Nx.$$

На нижней границе граничные условия принимают вид

$$v_1\,(u(i, Ny, k) - u(i, Ny - 1, k))/h = -\,(u(i, Ny, k + 1) - u(i, Ny, k))/\tau \text{ для } i = 1...Nx.$$

4. Задайте начальные условия по формуле (3.20) для моментов времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \tau$, полагая следующие значения параметров зондирующего

импульса: $\alpha = 0.45$, $Y_0 = 0.05$ м ($Y_0 = 0.05$ м $+ \tau v_0$), $v_0 = 1500$ м/сек; $\Theta = 0.00000666$ сек, $h = (0.2/501)$ м, $\tau = (h/3)/v_0$.

5. Проведите расчёты распространения импульса по разностной формуле (4.37)

$$u_{ij}^{k+1} = \left(2\left(\frac{c_{ij}}{\tau^2} - \frac{2}{h^2}\right)u_{ij}^k + \frac{u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k}{h^2} + \left(\frac{a_{ij}}{2\tau} - \frac{c_{ij}}{\tau^2}\right)u_{ij}^{k-1} \right)\left(\frac{a_{ij}}{2\tau} + \frac{c_{ij}}{\tau^2} \right)^{-1},$$

где $u_{ij}^k = u(i, j, k)$, $c_{ij} = v^{-2}(i, j)$.

Убедитесь, что отражённая волна сфокусировалась в точке с координатами (100 мм, 37.5 мм) (точка сетки (250, 93.5)). Преломлённая волна сфокусировалась примерно в точке $x = 100$ мм (250 точка сетки) и y в диапазоне от 168 мм до 176 мм (420–440 точки сетки).

Сравните результаты фокусировки с задачей № 1.1 главы 3. Убедитесь, что волны фокусируются в тех же точках, однако амплитуда в фокусе преломлённой волны примерно в 2 раза меньше в настоящей задаче.

Задача № 2

Решите **задачу 1,** используя технологию MPI для процессоров общего назначения на 4 вычислительных ядрах. Для этого разбейте область расчётов на 4 равных квадрата, как на рис. 3.10, с перекрытием в 1 точку сетки, как на рис. 3.11. Распараллельте вычисления по 1 вычислительному ядру на каждый квадрат. Сравните время расчётов со временем расчёта на одном ядре персонального компьютера.

Глава 5

Суперкомпьютерные технологии решения 3D обратных задач волновой томографии

5.1. Введение

Настоящая глава посвящена решению трёхмерных задач волновой томографии. В параграфе 5.2 сравнивается эффективность послойной схемы исследования трёхмерных объектов, в которой на каждом слое решается двумерная обратная задача, и непосредственно трёхмерной схемы волновой томографии, в которой обратная задача решается относительно трёхмерных неизвестных функций.

Волновой процесс в сплошной среде всегда является трёхмерным. Эффекты дифракции и рефракции невозможно с физической точки зрения адекватно интерпретировать в двумерном случае. В послойной схеме обследования часть информации о внутренней структуре объекта будет неминуемо потеряна. Поэтому в задачах волновой томографии предпочтительной является трёхмерная (3D) схема обследования. В последние несколько лет появились публикации именно в этой области [19–21, 26–28]. В работах [26–28] используется лучевая модель, которая не является адекватной при частотах менее 1 МГц. Более перспективными являются исследования, проводимые в рамках волновых моделей [19–21]. Постановка задачи и основные результаты главы 5 основаны на работах, опубликованных в статьях [33, 40]

Трёхмерная томография требует существенного усложнения аппаратуры по сравнению с послойными методами. Для приёма трёхмерного распределения волнового поля детекторы должны располагаться как минимум на двумерном массиве, а в идеальном варианте – окружать объект со всех сторон. Алгоритмы решения 3D задач волновой томографии очень сложны для реализации. Одной из причин является огромное число неизвестных, которое может достигать 10^8. Но более важной проблемой является нелинейность обратной задачи волновой томографии. Только в последние годы появление мощных графических станций и суперкомпьютеров

позволило решать трёхмерные обратные задачи на относительно небольших вычислительных системах, которые могут быть включены в состав диагностических комплексов.

5.2. О применимости послойных моделей в решении 3D задач ультразвуковой томографии

5.2.1. Методы аналитического решения трёхмерной задачи рассеяния ультразвукового излучения на неоднородности в виде шара

Одна из проблем в решении трёхмерных нелинейных обратных задач ультразвуковой томографии состоит в чрезвычайно огромном объёме вычислений. В связи с этим очень привлекательно использовать классическую томографическую схему, в которой восстанавливаются двумерные сечения 3D объектов. Для решения двумерных задач используются данные, полученные с помощью приёмников и источников, расположенных в одной плоскости. Таким образом, трёхмерная задача заменяется на последовательность более простых двумерных задач.

Эта идея заимствована из рентгеновской томографии, где использование послойного метода возможно благодаря тому, что коэффициент рефракции для рентгеновского излучения практически не отличается от единицы, а, следовательно, лучи практически не отклоняются от прямой. В ультразвуковой томографии выделение тонких слоёв аналогично рентгеновской томографии не всегда оправдано, поскольку лучи могут искривляться из-за наличия эффектов рефракции как в пределах исследуемого двумерного слоя, так и в третьем измерении и покидать слой. Добавим сюда также волновые эффекты дифракции и переотражения.

Поэтому в задачах ультразвуковой томографии использование послойных томографических схем не является строго обоснованным. В главе 5 делается попытка оценки возможности использования двумерных послойных схем в исследовании трёхмерных объектов. Такая оценка представляет интерес из-за большой популярности послойного подхода в ультразвуковой томографии [16, 17]. Выбор значений параметров в математических моделях ориентирован на задачи дифференциальной диагностики заболеваний молочной железы.

В настоящей главе эта проблема иллюстрируется расчётом тестовой модельной задачи. Для моделирования выбран самый простой трёхмерный объект – однородный шар. Рассеяние звуковой волны на шаре

может быть выражено аналитически. Используя известную технологию разложения в ряды по специальным функциям, можно рассчитать волновое поле в любой точке заданной плоскости трёхмерного пространства, пересекающей шар. Таким образом, мы решаем трёхмерную прямую задачу распространения волны аналитически. Далее, решив по полученным данным двумерную обратную задачу в этой плоскости численными методами, мы можем сравнить результат с соответствующим сечением шара. Для оценки качества послойных моделей обратная задача решалась в нескольких слоях.

Целью модельных расчётов в настоящем разделе является исследование возможностей использования послойных схем томографической реконструкции 3D объектов в волновой томографии. Пусть неоднородность представляет собой трёхмерный шар, помещённый в однородную среду. Выбор в качестве объекта исследования шара (рис. 5.1) определяется тем, что для сферически-симметричного объекта можно в явном виде с помощью разложения по специальным функциям выписать решение прямой задачи. Возможность решения прямой задачи аналитическим способом делает вычислительный эксперимент более «чистым» и позволяет дополнительно проконтролировать численные методы решения прямой задачи.

Аналитические методы решения задачи рассеяния на однородном шаре $\Omega \subset R^3$ с помощью метода разделения переменных хорошо известны [82]. Основные результаты раздела 5.2 изложены в соответствии с результатами работ [33, 83, 84]. Рассмотрим сначала звуковое давление в виде гармонического по времени колебания с частотой ω. В этом случае

$$p(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left(u(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}\right),$$

и волновое уравнение преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) + k^2(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad (5.1)$$

где $k(\boldsymbol{r}) = \omega / c(r)$ — волновое число. Предположим, что внутри шара $\Omega \subset R^3$ (рис. 5.1), имеющего границу S, скорость распространения звука

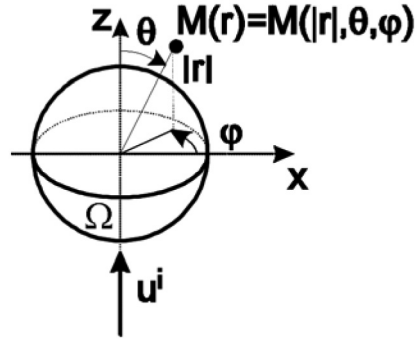


Рис. 5.1. К аналитическому выводу решения обратной задачи рассеяния

равна $c(\boldsymbol{r}) \equiv c_\Omega = const$. Вне шара скорость звука равна $c(\boldsymbol{r}) \equiv c_0 = const$. Будем считать, что неоднородность среды вызвана только изменением скорости звука, а плотность среды и внутри и вне шара равна $\rho = const$. Предположим, что падающее поле $u^i(\boldsymbol{r})$ $(\boldsymbol{r} \notin \Omega \subset \mathbf{R}^3)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси Z: $u^i(\boldsymbol{r}) = e^{-ikz}$. Полное поле вне шара Ω $(r \notin \Omega \subset \mathbf{R}^3)$ обозначим через $u(r)$. Оно представляет собой сумму падающей волны и неизвестного рассеянного поля $u^s(\boldsymbol{r})$, т. е. $u(\boldsymbol{r}) = u^i(\boldsymbol{r}) + u^s(\boldsymbol{r})$. Эти функции вне шара удовлетворяют уравнению Гельмгольца с волновым числом $k = \omega/c_0$. Внутри шара полное поле обозначим через $u^\Omega(r)$. Оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца внутри шара с волновым числом $k_\Omega = \omega/c_\Omega$. На границе S шара поле $u(\boldsymbol{r})$ и поле $u^\Omega(r)$ удовлетворяют условиям сопряжения [85]:

$$u = u^\Omega \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u^\Omega}{\partial \nu}, \tag{5.2}$$

где $\partial/\partial\nu$ – производная по внешней нормали на границе S. Эти соотношения выражают непрерывность давления на границе.

Задача рассеяния падающего поля $u^i(\boldsymbol{r})$ на шаре состоит в нахождении поля $u^\Omega(\boldsymbol{r})$ внутри шара $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и рассеянного поля $u^s(\boldsymbol{r})$ вне шара, удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности. Решение этой задачи может быть выписано в виде рядов по специальным функциям.

Введём сферические координаты. Точка M с координатами (x, y, z) будет иметь координаты $(|\boldsymbol{r}|, \theta, \varphi)$. В этом случае падающее поле может быть представлено в виде ряда

$$u^i(|\boldsymbol{r}|, \theta) = e^{-ik|\mathrm{r}|\cos\theta} = \sum_{m\geq 0} \delta_m \cdot (-i)^m \cdot T_m \cdot j_m(k|\boldsymbol{r}|),$$

где $T_m = P_m(\cos\theta)$, $P_m(x)$ – полиномы Лежандра, $\delta_m = 2m+1$,

$j_m(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} \cdot J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ – сферическая функция Бесселя первого рода.

Внутри области Ω решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию сопряжения (5.2), имеет вид

$$u^{\Omega}(|\boldsymbol{r}|,\theta)=\sum_{m\geq 0}F_m\cdot\delta_m\cdot(-i)^m\cdot T_m\cdot j_m(k|\boldsymbol{r}|),$$

где

$$F_m=\frac{j_m(kR)\cdot h_m^{'}(kR)-j_m^{'}(kR)\cdot h_m(kR)}{j_m(k_{\Omega}R)\cdot h_m^{'}(kR)-C\cdot j_m^{'}(k_{\Omega}R)\cdot h_m(kR)}.$$

Решение прямой задачи – рассеянная волна $u^s(r)$, которая является решением уравнения Гельмгольца (5.1) вне области Ω, удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда, и такая, что поле $u^i(r)+u^s(r)$ удовлетворяет условию сопряжения (5.2), будет иметь вид:

$$u^s(|\boldsymbol{r}|,\theta)=\sum_{m\geq 0}D_m\cdot\delta_m\cdot(-i)^m\cdot T_m\cdot h_m(k|\boldsymbol{r}|), \tag{5.3}$$

где

$$D_m=\frac{C\cdot j_m(kR)\cdot j_m^{'}(k_{\Omega}R)-j_m^{'}(kR)\cdot j_m(k_{\Omega}R)}{j_m(k_{\Omega}R)\cdot h_m^{'}(kR)-C\cdot j_m^{'}(k_{\Omega}R)\cdot h_m(kR)};$$

$C=\dfrac{k_{\Omega}\rho}{k\rho_{\Omega}}=\dfrac{c\rho}{c_{\Omega}\rho_{\Omega}}$, $h_m(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\cdot H_{m+\frac{1}{2}}(x)$ – сферическая функция Ханкеля второго рода. Сходимость рядов, представляющих решение задачи рассеяния, исследована в [86].

Решение задачи рассеяния выписано в предположении, что ультразвуковое поле является гармоническим по времени. В этом случае значения акустического давления могут быть получены, пользуясь (5.3). Предположим теперь, что падающее поле представляет собой плоскую волну в виде короткого импульса, распространяющегося вдоль оси OZ:

$$p^i(r,t)=f\left(t-\frac{z}{c_0}\right),$$

где функция $f(t)$ отлична от нуля на интервале $(t_*,t_*+\tau)$, τ – длительность импульса. На рис. 5.2 изображён график зондирующего импульса, использовавшегося нами при решении обратной задачи, как функции от времени.

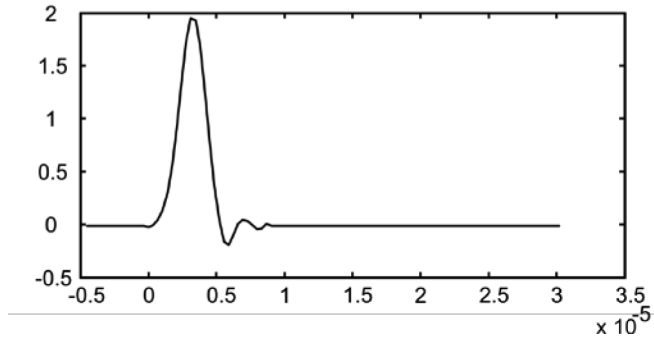


Рис. 5.2. Форма короткого зондирующего импульса

Будем рассматривать функцию $f(t)$ в виде конечного ряда Фурье (5.4) на отрезке $(-T_0,\ T_0)$, где T_0 выбирается достаточно большим из условия прохождения импульса в интересующей нас области. Момент времени $t=0$ соответствует началу прохождения импульса через точку $x=y=z=0$:

$$f(t)=\sum_{n=-N}^{N} f_n \exp(i\omega_n t), \qquad \omega_n=\frac{2\pi n}{T_0}. \tag{5.4}$$

Пользуясь линейностью уравнения Гельмгольца и условий сопряжения, можно решать задачу рассеяния по формулам (5.3) отдельно для каждой гармоники ω_n ($k_n=\omega_n/c_0$) соотношения (5.4) и получать решения $u^s(\boldsymbol{r},\omega_n)$. Общим решением поставленной задачи на интервале $(-T_0,\ T_0)$ будет сумма решений, полученных для рассматриваемых гармоник:

$$p(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=-N}^{N} u^s(\boldsymbol{r},\omega_n)\exp(i\omega_n t).$$

Заметим, что, поскольку $f(t)$ – действительная функция, проводить расчёты можно только для половины слагаемых.

5.2.2. Модельная задача реконструкции 3D шара в послойной (2.5D) томографической схеме

Значения параметров, использующихся в модельной задаче, являются характерными для ультразвукового обследования молочной железы. Схема численного эксперимента показана на рис. 5.3. Здесь изображён

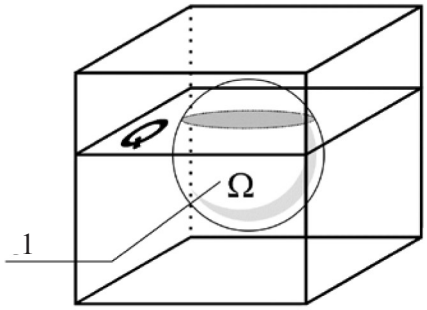


Рис. 5.3. Схема трёхмерного численного эксперимента

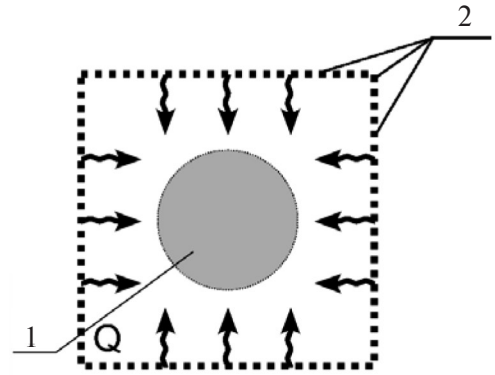


Рис. 5.4. Схема двумерного численного эксперимента

куб, внутри которого проводилось численное моделирование взаимодействия ультразвукового излучения с неоднородностью. Центр куба расположен в начале координат, ось Z направлена вверх. Размер ребра куба равен 20 см. Куб заполнен однородной средой с неоднородностью Ω, обозначенной цифрой 1. Среда имеет плотность 1 г/см^3 и скорость распространения ультразвука c_0 = 1500 м/с (вода). Неоднородность имеет форму шара радиусом 6 см. Значение скорости звука внутри шара $c_\Omega = 1600$ м/с. Плотность шара равняется плотности окружающей среды.

В качестве зондирующего импульса при решении прямой задачи в трёх измерениях использовалась плоская волна, падающая на шар перпендикулярно оси Z поочерёдно с четырёх боковых сторон вдоль осей X и Y. На рис. 5.2 изображён график зондирующего импульса. Ширина импульса λ = 7 мм. Расстояние между приёмниками, расположенными на сторонах куба, не превосходило λ/3.

Для исследования возможностей использования послойных схем в трёхмерной волновой томографии модельные расчёты по решению двумерной обратной задачи проводились в различных сечениях куба *Q,* перпендикулярных оси *Z* и пересекающих шар (рис. 5.3). Схема эксперимента при решении 2D обратной задачи приведена на рис. 5.4. Размер квадратных сечений *Q*, в которых решались 2D обратные задачи, равен 20 × 20 см, размер разностной сетки – 1000 × 1000 точек. Неоднородность – сечение шара – имеет вид круга и обозначена цифрой 1.

Приёмники расположены по периметру квадрата и обозначены цифрой 2. Неоднородность зондируется с каждой стороны квадрата четырьмя плоскими импульсами, обозначенными стрелками.

Рассмотрим случай, когда сечение Q лежит в плоскости Z = 0 (центральное сечение). Приведём сравнение результатов решения прямой задачи в этом сечении для 3D случая (для неоднородности в виде шара) по формуле (5.3) и результатов аналитического решения прямой задачи для 2D случая. В 2D случае неоднородность имеет вид круга (рис. 5.4), полученного при пересечении выбранного центрального слоя и шара (рис. 5.3) (эта задача эквивалентна рассеянию на цилиндре в 3D). При решении 2D обратной задачи по 2D данным прямой задачи круг восстанавливается с очень высоким качеством. Поэтому сравнение данных прямой задачи в 2D и 3D представляет интерес, т. к. чем больше отличие, тем худшее качество реконструкции следует ожидать в послойной (2.5D) схеме томографии.

На рис. 5.5 приведены результаты расчёта прямой задачи для цилиндра (сплошная линия) и шара (пунктирная линия) на дальней по направлению падающей волны границе квадрата Q центрального сечения. Разница между сплошной и пунктирной линией на рис. 5.5 демонстрирует ошибку входных данных, которую вносит непосредственно послойная схема томографических исследований. Выбрано несколько последовательных значений времени при прохождении этой границы фронтом рассеянной волны. Сравнение графиков показывает, что наибольшие различия наблюдаются в области геометрической тени за неоднородностью.

Таким образом, даже для центрального сечения, где падающая волна в силу симметрии не выходит из плоскости сечения, имеются расхождения в рассеянии для 2D и 3D задачи, что связано с рефракцией в соседних слоях для 3D случая. Всё это сказывается на качестве реконструкции даже центрального сечения. Ещё более значимыми эти эффекты являются для сечений, не проходящих через центр сферы.

Модельные расчёты для послойной реконструкции трёхмерного объекта состояли в следующем. Выбирается набор горизонтальных сечений шара $z = z_i$ (см. рис. 5.3) и аналитически по формуле (5.3) решается прямая трёхмерная задача по вычислению рассеянного поля на границе куба в каждой плоскости $z = z_i$. По полученным данным решаются 2D обратные задачи в каждом сечении (см. рис. 5.4) на основе методов, описанных

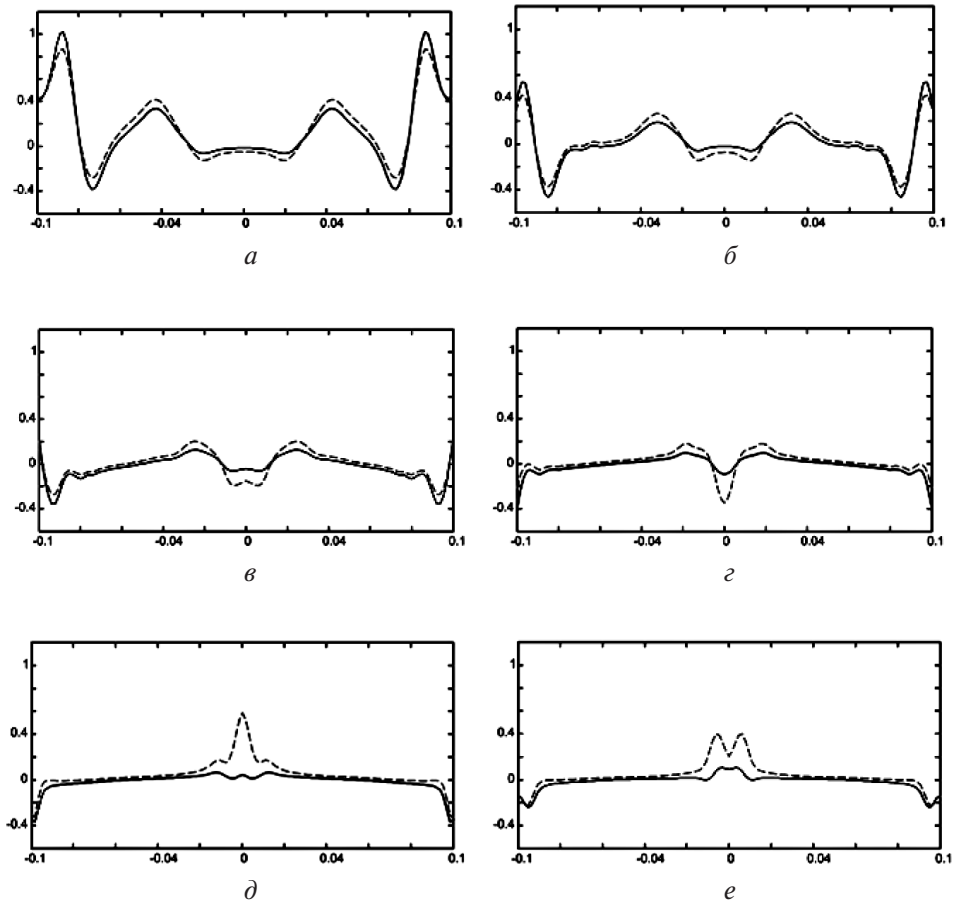


Рис. 5.5. Сравнение решений прямой задачи для цилиндра и сферы в последовательные моменты времени

выше. Полученное решение сравнивается с известным сечением шара в соответствующей плоскости.

На рис. 5.6 снизу приведены восстановленные в выбранных сечениях $z = 0$, $z = 4$ см, $z = 5$ см, $z = 6$ см скоростные разрезы $c(x, y)$, где $z = 0$ проходит через центр шара, значение z возрастает слева направо на рисунке. Сверху для наглядности приведены модельные сечения шара для тех же z. Видно, что для центрального сечения $z = 0$ восстановленное решение достаточно хорошо совпадает с точным решением. Форма сечения

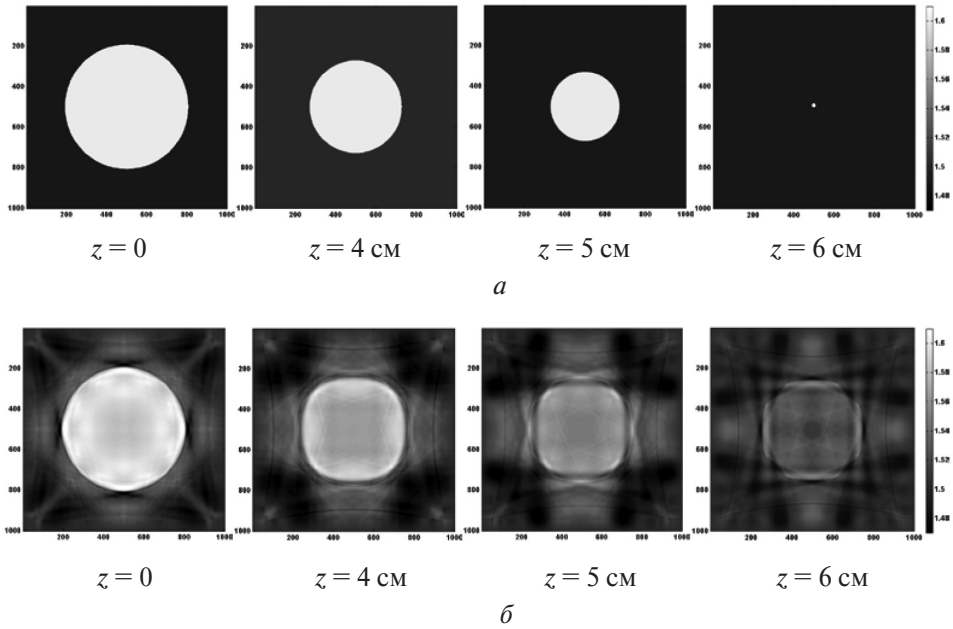


Рис. 5.6. Модельная задача реконструкции трёхмерного шара:
а – сечения шара в плоскостях z = const, *б* – реконструированные изображения

практически совпадает с формой неоднородности в этом сечении. Наличие небольших артефактов связано с расхождениями при решении прямой задачи в 2D и 3D, приведёнными на рис. 5.5. В следующем сечении при $z = 4$ см форма неоднородности уже искажается, что связано с явлениями рефракции. При увеличении z увеличивается влияние рефракции, которая приводит к ещё большим искажениям для сечения $z = 5$ см. Так, при $z = 6$ см всё полученное изображение представляет собой артефакт, поскольку точным решением является точка.

Таким образом, можно считать, что, хотя в принципе послойная схема применима в ультразвуковой томографии, её использование приводит к искажению геометрических параметров неоднородности, к появлению артефактов. Проще всего проблемы, возникающие в послойной томографии, можно описать на физическом уровне строгости в лучевом приближении. В отличие от рентгеновской томографии, лучи в ультразвуковой томографии уже не являются прямыми. Более того, они выходят из плоскости, что и ограничивает возможности использования послойных схем томографии.

Отметим, что методы решения прямой и обратной задачи акустики приведены в предположении, что плотность среды, входящая в общее уравнение линейной акустики, слабо меняется или постоянна.

Проведённые модельные расчёты позволяют сделать следующие выводы:

1. Широко применяемый в настоящее время подход, в рамках которого решение трёхмерной задачи ультразвуковой томографии заменяется набором двумерных обратных задач по слоям, не является, строго говоря, обоснованным с математической точки зрения. Однако полученные результаты показывают, что в области параметров, близких к ультразвуковой диагностике заболеваний молочной железы, с некоторой погрешностью удаётся восстанавливать как форму неоднородного объекта, так и абсолютные значения скорости распространения волны.

2. Наличие эффектов дифракции, рефракции и переотражения приводит к появлению артефактов в восстановленных сечениях, что необходимо иметь в виду при интерпретации данных реконструированных изображений. Наиболее значимым физическим эффектом, определяющим такие искажения, является эффект рефракции.

3. Используемый в модельных расчётах в качестве неоднородности объект – однородный шар – является примитивным. Однако в этом случае удаётся выписать аналитическое решение для рассеянной волны, что позволяет провести полноценное моделирование и даже для такого простого объекта обнаружить эффекты искажения решения обратной задачи.

4. Более перспективным является решение обратных задач ультразвуковой томографии непосредственно в 3D варианте, в котором эффекты дифракции, рефракции, переотражения точно учитываются в постановке задач. Платой за это является огромный объём вычислений при решении обратной задачи. Как будет показано в главах 5, 6, такие трёхмерные задачи можно успешно решать в моделях, учитывающих как дифракционные эффекты, так и поглощение [33, 40].

5.3. Постановка обратных задач 3D волновой томографии в модели без поглощения

В трёхмерной задаче томографии источники и приёмники располагаются вокруг исследуемого объекта в трёхмерном пространстве. Для простоты будем считать исследуемую область Ω кубом размера $H \times H \times H$.

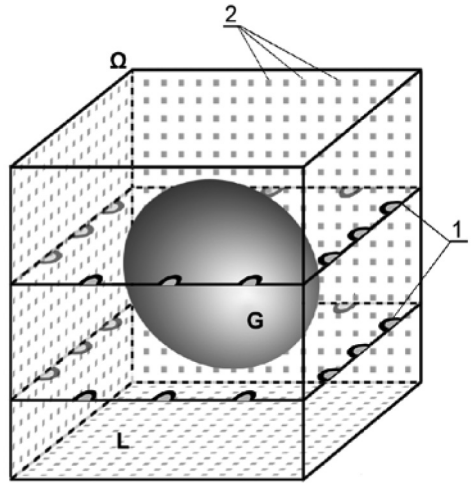


Рис. 5.7. Схема 3D томографического эксперимента

На рис. 5.7 приведена трёхмерная схема томографического эксперимента. Цифрой 1 обозначены источники ультразвукового излучения, приёмники обозначены цифрой 2 и расположены на гранях куба Ω. Исследуемый объект G расположен внутри куба Ω. Остальное пространство L заполнено водой с известной скоростью распространения звука c_0.

Математическая постановка трёхмерной задачи отличается от двумерной задачи, подробно рассмотренной в предыдущих главах, только тем, что волновое уравнение является трёхмерным, а не двумерным, а границы области – двумерными, а не одномерными.

Распространение ультразвука в сплошной среде описывается волновым уравнением:

$$c(\boldsymbol{r})u_{tt}(\boldsymbol{r},t)-\Delta u(r,t)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot f(t), \tag{5.5}$$

$$u(\boldsymbol{r},t=0)=u_t(\boldsymbol{r},t=0)=0, \tag{5.6}$$

$$\partial_n u|_{ST}=p(\boldsymbol{r},t). \tag{5.7}$$

Здесь $c^{-0.5}(\boldsymbol{r})$ – скорость звука в среде, $\boldsymbol{r}\in R^3$ – положение точки в пространстве, u – акустическое давление; Δ – оператор Лапласа по переменной $\boldsymbol{r}$. Зондирующий импульс, генерируемый точечным источником

в точке $\boldsymbol{r}_0$, описывается функцией $f(t)$, $\partial_n u|_{ST}$ – производная вдоль нормали к поверхности S в области S × (0, T), функция $p(\boldsymbol{r}, t)$ известна. Можно рассматривать волновое поле u, являющееся решением задачи (5.5)–(5.7), как неявную функцию от $c(\boldsymbol{r})$. Обратная задача состоит в нахождении функции $c(\boldsymbol{r})$, описывающей пространственное распределение скорости звука внутри объекта, по экспериментальным данным – акустическому давлению $U(s, t)$, измеренному на границе S области Ω за время (0, T) при различных положениях $\boldsymbol{r}_0$ источника ультразвука.

Так же как в двумерной задаче, градиент $\Phi'(u(c))$ функционала невязки $\Phi(u(c)) = \frac{1}{2}\left\|u|_{ST} - U\right\|^2$, представляющий собой линейную относительно произвольной вариации dc часть приращения функционала $\Phi(u(c))$, может быть вычислен по формуле:

$$\Phi'_c(u(c)), c(\boldsymbol{r})) = \int_0^T w_t(\boldsymbol{r}, t) u_t(\boldsymbol{r}, t) dt. \tag{5.8}$$

Здесь $u(\boldsymbol{r}, t)$ – решение основной задачи (5.5)–(5.7), а $w(\boldsymbol{r}, t)$ – решение «сопряженной» задачи при заданном $c(\boldsymbol{r})$:

$$c(\boldsymbol{r}) w_{tt}(\boldsymbol{r}, t) - \Delta w(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{5.9}$$

$$w(\boldsymbol{r}, t = T) = w_t(r, t = T) = 0, \tag{5.10}$$

$$\partial_n w(\boldsymbol{s}, t) = u(\boldsymbol{s}, t) - U(\boldsymbol{s}, t),\ \boldsymbol{s} \in S. \tag{5.11}$$

Зная градиент, можно предложить различные методы градиентной минимизации функционала невязки. В модельных расчётах был использован метод наискорейшего спуска. Итерационная последовательность $c^{(n)}$ для минимизации функционала невязки строится следующим образом:

1. В качестве начального приближения для первой итерации ($n = 0$) используется $c^{(0)} = c_0 = const$.

2. Для заданной скорости звука $c(\boldsymbol{r}) = c^{(n)}$ решается прямая задача распространения ультразвуковой волны (5.5)–(5.7) в разностной аппроксимации. Определяются сигналы $u(\boldsymbol{s}, t)$ на каждом из детекторов $\boldsymbol{s}$.

3. Из полученных значений поля $u(\boldsymbol{s}, t)$ и экспериментальных данных $U(\mathbf{s}, t)$ в точках $\boldsymbol{s}$, где расположены детекторы, определяются граничные

условия (5.11). Решается задача (5.9)–(5.11) для w и определяются значения $w(\boldsymbol{r}, t)$ в каждой точке сетки.

4. Используя полученные значения $u(\boldsymbol{r}, t)$ и $w(\boldsymbol{r}, t)$, вычисляется градиент $\Phi'_c(u(c^{(0)}))$ функционала невязки по формуле (5.8).

5. Зная градиент в точке $c^{(n)}$, находится минимум функционала $\Phi(c^{(n)} - \gamma\Phi'_c(c^{(n)}))$ по параметру γ в области $\gamma > 0$.

6. Точка минимума функционала принимается за $c^{(n+1)}$. Итерационный процесс возобновляется с пункта 2 для следующей итерации $n = n + 1$.

Отметим, что для вычисления градиента нужно численно решить две трёхмерные задачи. Первая задача состоит в расчёте распространения ультразвуковой волны (5.5)–(5.7), а вторая – в расчёте функции $w(\boldsymbol{r}, t)$ согласно (5.9)–(5.11). Именно эти вычисления занимают большую часть времени в используемых итерационных методах. Количество операций, необходимое для расчёта $u(\boldsymbol{r}, t)$ и $w(\boldsymbol{r}, t)$, составляет $X \times Y \times Z \times T \sim N^4$, где N – количество точек сетки по одной координате. Вместо одномерной минимизации по γ можно приближённо определить значение γ по результатам расчётов: если при выбранном шаге γ невязка убывает: $\Phi(c^{(n)} - \gamma\Phi'_c(c^{(n)})) < \Phi(c^{(n)})$, то γ на следующей итерации нужно увеличить, в противном случае уменьшить. Таким образом, можно обойтись только однократным решением задачи распространения ультразвуковой волны на каждой итерации. Начальное значение γ всегда можно выбрать таким, что $\Phi(c^{(0)} - \gamma\Phi'_c(c^{(0)})) < \Phi(c^{(0)})$, если градиент не равен нулю.

5.4. Численные алгоритмы решения 3D задач ультразвуковой томографии в моделях без поглощения

Для решения трёхмерной обратной задачи будем использовать метод конечных разностей на равномерных сетках. В такой постановке решение дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введём равномерную дискретную сетку:

$$x_i = ih, 0 \le i < n;$$
$$y_j = jh, 0 \le j < n;$$
$$z_l = lh, 0 \le l < n;$$
$$t_k = k\tau, 0 \le k < m;$$

где h – шаг сетки по пространственным переменным, τ – шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau < h/\sqrt{3}$. Здесь $c^{-0.5}$ — максимальная скорость распространения волны [63]. Используем следующие аппроксимации производных 2-го порядка в уравнении (5.5):

$$u_{tt}(x_i, y_j, z_l, t_k) = (u_{ijlk+1} - 2u_{ijlk} + u_{ijlk-1}) / \tau^2,$$

$$u_{xx}(x_i, y_j, z_l, t_k) = (u_{i+1jlk} - 2u_{ijlk} + u_{i-1jlk}) / h^2,$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Здесь $u_{ijlk} = u(x_i, y_j, z_l, t_k)$. В области, не содержащей источников, получаем явную разностную схему для дифференциального уравнения (5.5):

$$c_{ijl}\frac{u_{ijlk+1} - 2u_{ijlk} + u_{ijlk-1}}{\tau^2} - \frac{u_{i+1jlk} - 2u_{ijlk} + u_{i-1jlk}}{h^2} -$$
$$-\frac{u_{ij+1lk} - 2u_{ijlk} + u_{ij-1lk}}{h^2} - \frac{u_{ijl+1k} - 2u_{ijlk} + u_{ijl-1k}}{h^2} = 0.$$

Выделяя член u_{ijlk+1} для $(k+1)$-го слоя по времени, получим формулу для расчёта $u(\boldsymbol{r}, t)$ последовательно по времени:

$$u_{ijlk+1} = u_{ijlk}(2 - \frac{8\tau^2}{c_{ijl}h^2}) + \frac{(u_{i+1jlk} + u_{i-1jlk})\tau^2}{c_{ijl}h^2} +$$
$$+\frac{(u_{ij+1lk} + u_{ij-1lk})\tau^2}{c_{ijl}h^2} + \frac{(u_{ijl+1k} + u_{ijl-1k})\tau^2}{c_{ijl}h^2} - u_{ijlk-1}. \qquad (5.12)$$

Здесь c_{ijl} – значения $c(x_i, y_j, z_l)$ в точке (x_i, y_j, z_l). Приведённая разностная схема является простейшей. Можно построить и более точные разностные схемы, суммируя производные по большему количеству направлений в пространстве [87, 88].

Будем считать, что везде вне исследуемой области G скорость распространения волны равна $c_0 = \text{const}$. Численные методы расчёта прямой задачи вынуждают нас проводить вычисления в некоторой расчётной области Ω. Будем считать, что везде на границе S расчётной области Ω

нам известно волновое поле, то есть мы имеем возможность покрыть датчиками всю границу области Ω. Таким образом, поставив условия на бесконечности, можно решить задачу во внешней области $\bar{\Omega} = \mathbf{R}^3 \backslash \Omega$, то есть восстановить $u(\boldsymbol{r}, t)$ для любого t. Зная $u(\boldsymbol{r}, t)$ в области $\bar{\Omega}$, можно вычислить $\partial u / \partial \boldsymbol{n}$ на границе области Ω. Обозначим $p(\boldsymbol{r}, t) = \partial u / \partial \boldsymbol{n}$ на границе S области Ω. В постановке задачи (5.5)–(5.7) в качестве граничных условий фигурирует именно эта функция $p(\boldsymbol{r}, t)$. Такие же граничные условия используются в постановке задачи в главах 3 и 4.

При проведении модельных расчётов можно использовать следующие приближённые подходы. Как и прежде, будем считать, что везде вне исследуемой области G скорость распространения волны равна $c_0 = \text{const}$. Одним из подходов является выбор виртуальной границы расчётной области, расположенной настолько далеко от исследуемой области Ω, чтобы отражённые от виртуальной границы волны можно было бы отделить по времени прихода. Это приводит к необходимости работы в достаточно большой расчётной области, что существенно увеличивает время расчётов.

Альтернативным подходом является выбор граничных условий на границе S области Ω. С физической точки зрения представляется естественным минимизировать отражённые от виртуальной границы S волны. Хорошо известно, что при нормальном падении волны на границу условием неотражения является соотношение

$$\partial_n u|_{ST} = -c^{0.5} \partial_t u|_{ST}. \tag{5.13}$$

При углах падения, близких к нормали, это соотношение обеспечивает максимальную «прозрачность» границы. Именно это условие и использовалось при проведении модельных расчётов.

Для того чтобы гасить отражённые от виртуальной границы волны, можно использовать поглощающие слои на границе расчётной области. В параграфе 5.6 разработаны численные методы решения задачи распространения ультразвуковых волн в среде с поглощением. Расположив на границе S тонкий слой с большим коэффициентом поглощения, можно минимизировать отражение от границы. Существуют и более точные условия неотражения [89, 90].

Разностная схема для w аналогична схеме для u, но расчёт $w(\boldsymbol{r}, t)$ осуществляется в обратном направлении по времени – определяется w_{ijlk-1}

для (k–1)-го слоя по времени. Общее время моделирования T выбирается достаточно большим, так чтобы все основные волны, отражённые и преломлённые внутри исследуемого объекта, успевали дойти до приёмников. Граничные условия (5.13) в разностной аппроксимации, например на границе $z = const$ куба, записываются в виде

$$\frac{w_{ijl+1k} - w_{ijl-1k}}{2h} = u_{ijlk} - U_{ijlk}.$$

Градиент (5.8) функционала невязки вычисляется по разностной формуле

$$grad_{ijl} = \sum_{k=0}^{m} \frac{u_{ijlk+1} - u_{ijlk}}{\tau} \frac{w_{ijlk+1} - w_{ijlk}}{\tau} \tau. \qquad (5.14)$$

Точечный источник $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)f(t)$ в соотношении (5.5) формирует в однородной среде сферически-симметричную волну, которая распространяется от точки $\boldsymbol{r}_0$ со скоростью $v_0 = c_0^{-0.5}$. Амплитуду волны $u(\boldsymbol{r}, t)$ в точке $\boldsymbol{r}$ можно вычислить по формуле

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{f(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| / \mathrm{v}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}, \boldsymbol{r} \in R^3. \qquad (5.15)$$

В реальности точечных источников не существует, и для того, чтобы подставить в задачу (5.5) поле от реального источника, можно, например, задать $u(\boldsymbol{r}, t_0)$ и $u_t(\boldsymbol{r}, t_0)$ в начальный момент времени t_0. В разностной аппроксимации можно задать $u(\boldsymbol{r}, t_0)$ и $u(\boldsymbol{r}, t_0 + \tau)$, где τ – шаг сетки по времени. Для модельного точечного источника поле в начальный момент времени t_0 можно вычислить аналитически по формуле (5.15).

5.5. Модельные расчёты обратных задач 3D ультразвуковой томографии в моделях без поглощения

5.5.1. Модельные расчёты задачи 3D волновой томографии с полными данными

В качестве фантома для модельных исследований использовался неоднородный по структуре трёхмерный объект размером до 100 мм, в котором изменение скорости распространения ультразвука варьировалось в пределах 10 %. Минимальный размер неоднородностей составлял 1 мм.

Основные параметры для модельных задач без поглощения выбраны следующими:

1. Длина волны зондирующего импульса $\lambda = 5$ мм.

2. Размер области ультразвукового зондирования – до 10 × 10 × 10 см. Расчёты проводятся на равномерной сетке внутри куба, количество точек сетки по координатам X × Y × Z составляет 320 × 320 × 320, шаг сетки – 0.3 мм; Число шагов по времени T составляет 1280, шаг сетки по времени – 10 мкс.

3. Количество источников варьируется от 5 до 17.

4. Расстояние между приёмниками – 2.5 мм.

В модельных расчётах использовалось следующее представления для зондирующего импульса:

$$u(\boldsymbol{r}, t_0) = \begin{cases} \sin(2\pi x/\lambda), & |0.5 + x/\lambda| \le 0.25 \\ \sin(2\pi x/\lambda)\cdot|\sin(2\pi x/\lambda)|, & 0.25 \le |0.5 + x/\lambda| \le 0.5, \\ 0, \quad |0.5 + x/\lambda| > 0.5 \end{cases} \tag{5.16}$$

где $x = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - v_0 t_0$ – расстояние от фронта волны до источника, находящегося в точке $\boldsymbol{r}_0$, v_0 – скорость распространения звука в воде, равная 1.5 км/с, λ – заданная ширина импульса (длина волны). График зондирующего импульса, заданного согласно (5.16), приведён на рис. 5.8.

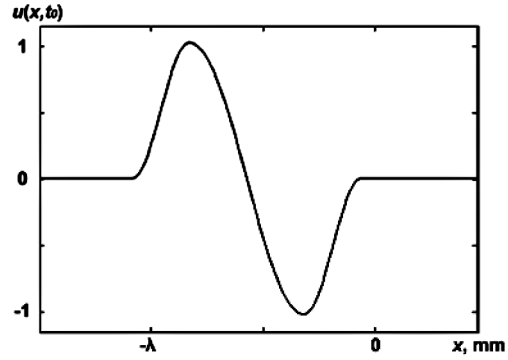


Рис. 5.8. График зондирующего импульса

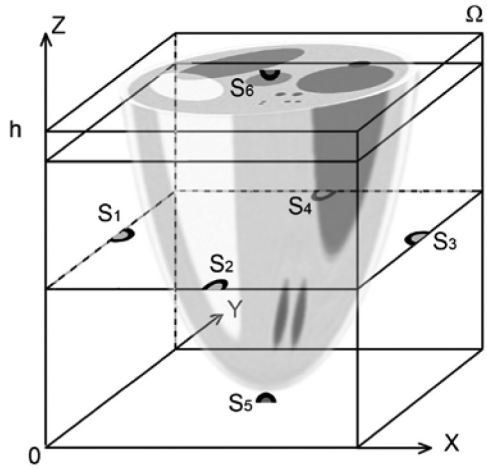


Рис. 5.9. Схема расположения источников в модельной задаче с полными данными

В модельной задаче волновой томографии с полными данными источники и приёмники располагались со всех сторон от исследуемого объекта. Источники S_1–S_6 располагаются по центрам каждой из граней куба (рис. 5.9). Приёмники располагаются на каждой грани куба с шагом 2.5 мм, так что каждая грань представляет собой двумерный массив из 40 × 40 приёмников.

Сначала решалась прямая задача распространения ультразвуковой волны (5.5)–(5.7) в неоднородной среде в трёхмерной области с начальными условиями (5.16), задающими зондирующий импульс. Полученные значения волнового поля на детекторах $U|_{ST}$ сохранялись – эти значения используются в качестве экспериментальных данных для обратной задачи. Затем, используя полученные значения $U|_{ST}$ в соотношении (5.11), итеративно решалась обратная задача восстановления трёхмерного распределения скорости звука $v(x, y, z)$.

На рис. 5.10 приведены сечения трёхмерной функции скорости звука $v(x, y, z)$ в плоскостях, перпендикулярных оси Z. Слева приведены сечения фантома, справа – сечения восстановленного трёхмерного изображения. Изображение получено после 120 итераций итерационного процесса. Видно, что качество реконструкции очень высокое, достаточно хорошо восстанавливаются даже неоднородности малого размера ~2 мм.

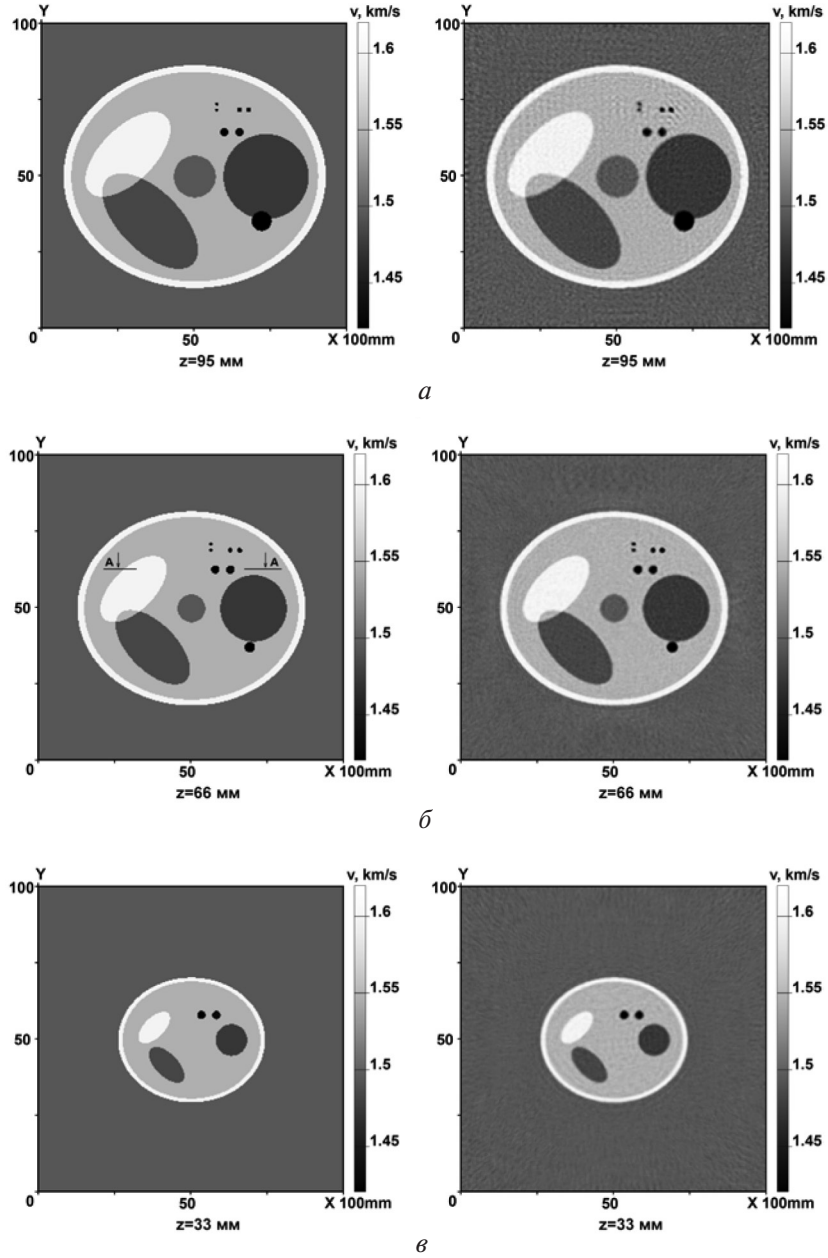
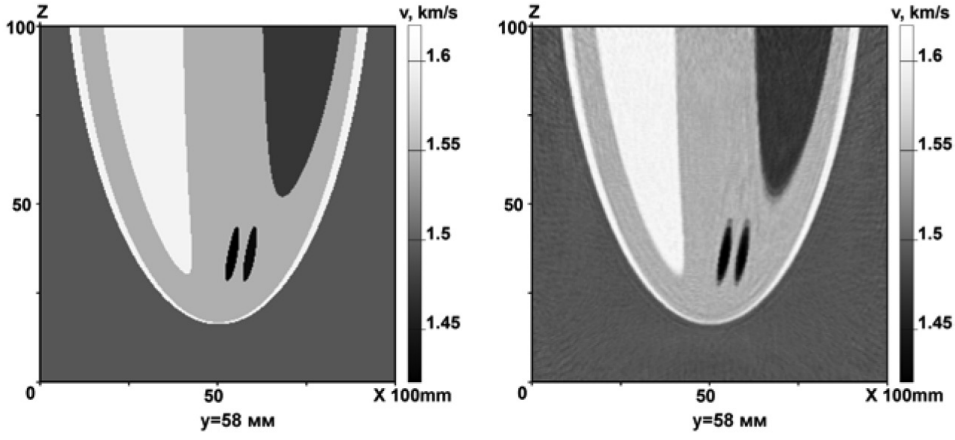
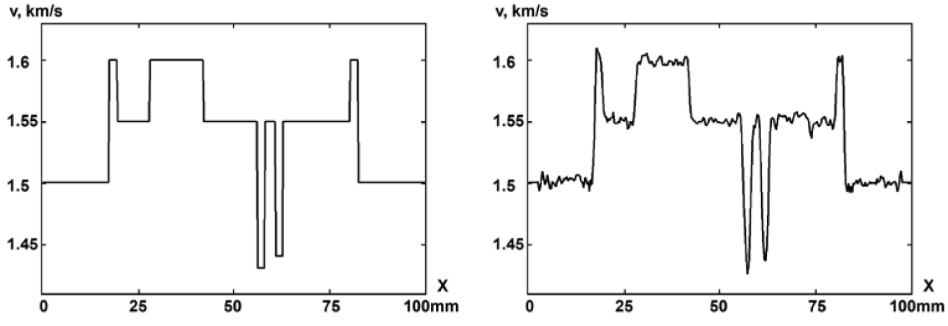


Рис. 5.10. Модельная задача 3D томографии с полными данными; сечения 3D объекта в плоскостях z = const; слева – фантом, справа – восстановленное изображение: *а* – сечение при z = 95 мм, *б* – сечение при z = 66 мм, *в* – сечение при z = 33 мм



а *б*

Рис. 5.11 Модельная задача реконструкции 3D объекта с полными данными; сечения 3D объекта в плоскости y = const: *а* – фантом, *б* – восстановленное изображение



а *б*

Рис. 5.12. График скорости звука на линии А–А:
а — фантом, *б* – реконструированное значение скорости

На рис. 5.11, *а, б* приведены сечения фантома и восстановленного изображения в плоскости, перпендикулярной оси *Y*. В этом сечении неоднородности имеют вытянутую форму. Качество реконструкции также высокое.

На рис. 5.12 приведены графики точной и восстановленной скорости звука на линии А–А рисунка 5.10, *б*. Видно, что хорошо восстанавливается

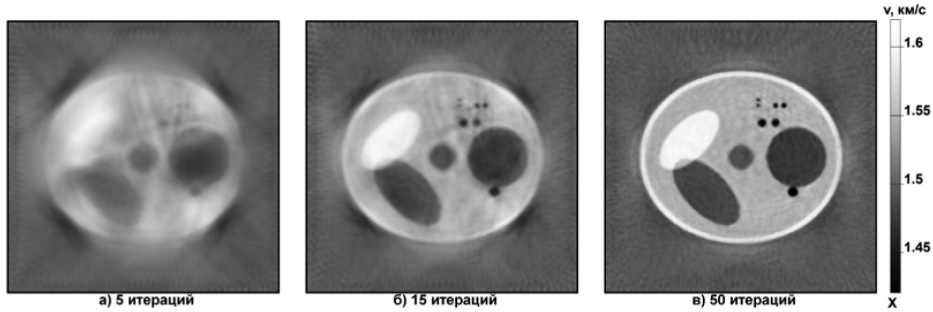


Рис. 5.13. Восстановленное изображение при разном числе итераций

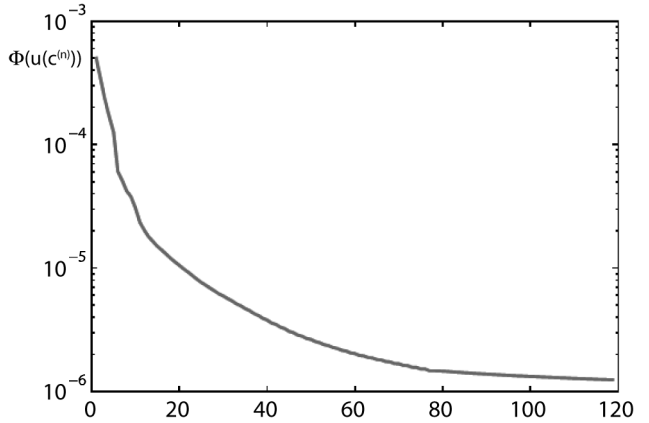


Рис. 5.14. График значения функционала невязки
в зависимости от числа итераций

не только форма неоднородностей, но и значение скорости звука внутри небольших включений.

В качестве начального приближения для итерационного процесса во всех расчётах использовалось $c^{(0)} = const$. Рис. 5.13 демонстрирует динамику изменения восстановленного изображения скорости звука в зависимости от числа итераций.

В табл. 5.1 приведены значения функционала невязки для 5, 15 и 120 итераций. Видно, что функционал невязки за 120 итераций уменьшился в 100 раз.

Таблица 5.1

Значения функционала невязки

Число итераций	5	15	120
Значение невязки (для 6 источников)	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$3.026 \cdot 10^{-4}$

На рис. 5.14 показан график значения функционала невязки в зависимости от числа итераций. Метод наискорейшего спуска обеспечивает монотонное убывание функционала невязки. На первых итерациях невязка убывает достаточно быстро, а с увеличением количества итераций, по мере приближения к решению, невязка убывает значительно медленнее.

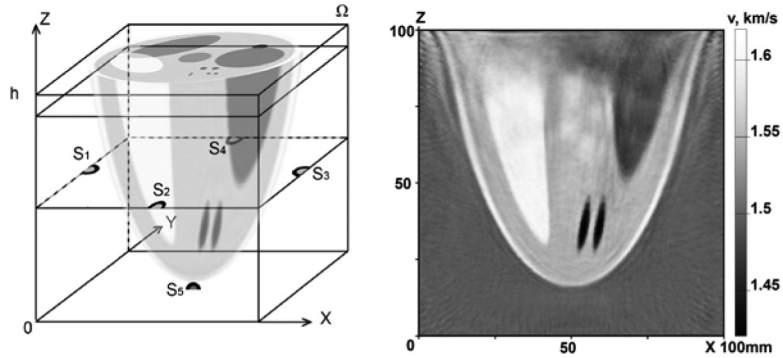
5.5.2. Модельные расчёты задачи 3D волновой томографии с неполными данными

Не всегда источники и приёмники могут быть расположены со всех сторон от исследуемого объекта. Когда на части поверхности исследуемой области источники и приёмники отсутствуют, мы получаем задачу томографии с неполными данными. Такая задача возникает, например, в медицинской диагностике рака молочной железы [20]. Источники и приёмники тогда могут располагаться везде, кроме верхней границы области (где расположена грудная клетка). Будем считать, что источники и приёмники не могут располагаться в области $z \geq H$.

Исключим из схемы на рис. 5.9 источник S_6 и приёмники на верхней грани куба. Получится вариант расположения источников, изображённый на рис. 5.15, *а*. Восстановленное в такой схеме изображение в плоскости XZ приведено на рис. 5.15, *б*. Видно, что при таком расположении источников и приёмников качество реконструкции сильно падает по мере приближения к верхней границе области.

Качество реконструкции можно значительно повысить, разместив большее количество источников вблизи плоскости $z = H$, например согласно схеме, изображённой на рис. 5.16.

Во втором варианте размещения на плоскости $z = 0.95H$ располагаются ещё 12 источников, таким образом, всего используется 17 источников. Восстановленные при таком специально выбранном расположении источников изображения практически не отличаются от результатов,



а *б*

Рис. 5.15. Трёхмерная задача с неполными данными:
а – первый вариант схемы размещения источников, *б* – восстановленное в плоскости y = const распределение скорости звука

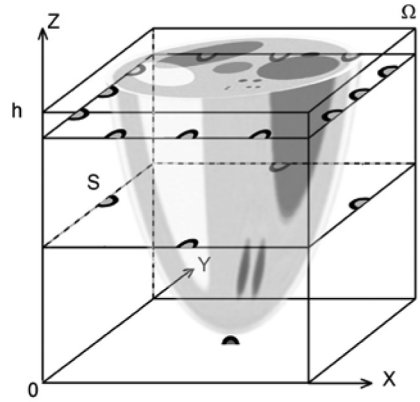


Рис. 5.16. Схема расположения источников в модельной задаче с неполными данными (второй вариант)

полученных в схеме с полными данными. На рис. 5.17, *а–в* приведены восстановленные в схеме с неполными данными сечения $v(x, y, z)$ в плоскостях, перпендикулярных оси Z, совпадающих с плоскостями сечений на рис. 5.10. На рис. 5.17, *г* приведено восстановленное сечение в плоскости y = const, аналогично рис. 5.11. Более подробное сравнение изображений показывает, что хорошее качество восстановленного изображения сохраняется вплоть до $z = H-1$ мм, т. е. заметные отличия имеют место только

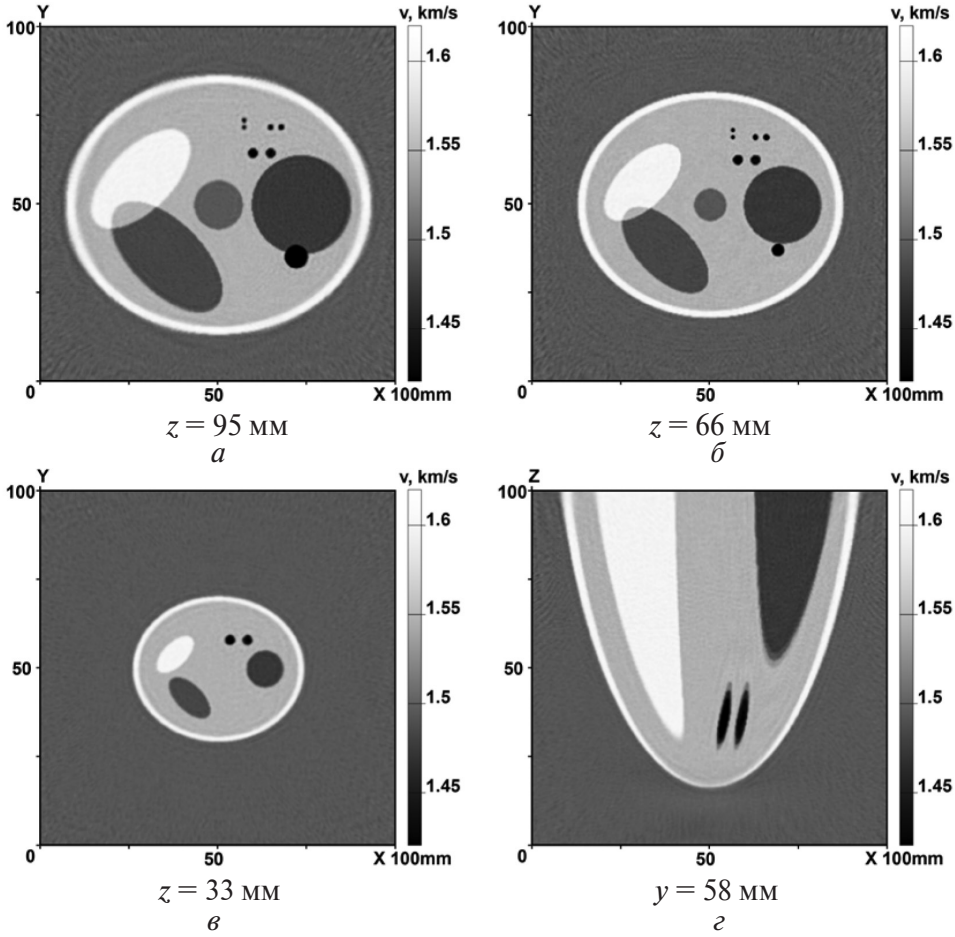


Рис. 5.17. Восстановленные сечения 3D объекта в схеме с неполными данными: *а* – $z = 95$ мм, *б* – $z = 66$ мм, *в* – $z = 33$ мм, *г* – $y = 58$ мм

на самой плоскости $z = H$. Этот результат является весьма оптимистичным для томографической диагностики рака молочной железы.

Понятно, что, имея восстановленную функцию $v(x, y, z)$ как трёхмерную функцию, заданную на сетке, можно получить сечение этой функции в любой плоскости, не обязательно параллельной координатной плоскостям. На рис. 5.18 приведено сечение функции $v(x, y, z)$ в наклонной плоскости. В 3D томографии разрешающая способность по всем направлениям примерно одинакова, в послойной же схеме расстояние

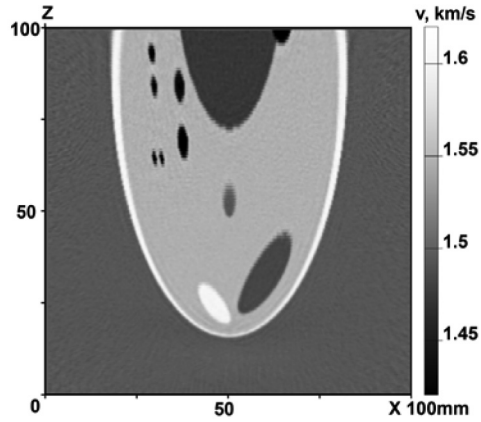


Рис. 5.18. Восстановленное сечение 3D объекта в модели с неполными данными в наклонной плоскости

между отдельными слоями обычно достаточно велико, велика и погрешность обнаружения неоднородностей в третьем измерении.

Для модельных расчётов использовался графический кластер, входящий в состав суперкомпьютерного комплекса МГУ. Использовалось 17 графических ускорителей NVIDIA Tesla X2070 – по числу источников. Поскольку расчёты для каждого источника практически независимы, они выполняются параллельно. Решение обратной задачи реконструкции скорости $v(x, y, z)$ заняло порядка 2 часов. Более подробно особенности реализации алгоритмов решения задач 3D томографии обсудим в главе 6.

5.6. Обратные задачи 3D ультразвуковой томографии в модели с поглощением

В реальных задачах ультразвуковой диагностики поглощение является значимым фактором [73]. Рассмотрим обратную задачу ультразвуковой томографии в модели, включающей поглощение. Будем использовать следующую математическую модель распространения волн, учитывающую поглощение:

$$c(r)u_{tt}(r,t)+a(r)u_t(r,t)-\Delta u(r,t)=\delta(r-q)\cdot f(t), \qquad (5.17)$$

$$u(r, t) = 0) = u_t(r, t = 0) = 0,$$

$$\partial_n u\big|_{ST} = p(r,t).$$

В такой модели поглощение не зависит от частоты. Это одна из простейших моделей поглощения, соответствующая, например, распространению электромагнитных колебаний в проводящей среде или акустических колебаний в вязкой неупругой среде [75].

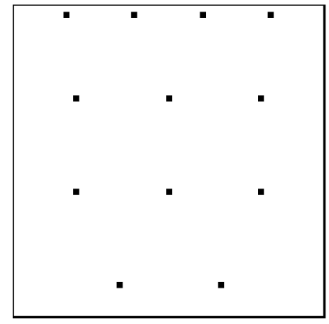


Рис. 5.19. Расположение источников на каждой из боковых граней куба в модельной задаче с учётом поглощения

В моделях с поглощением можно ставить перед собой задачу восстановления не только скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$, но и функции $a(\boldsymbol{r})$, характеризующей поглощение [32]. В этом случае для получения высокого качества реконструкции не только скоростного разреза, но и функции поглощения необходимо использовать большее количество источников. Для расчёта модельной задачи ультразвуковой томографии с учётом поглощения использовалось 48 источников – по 12 источников на каждой из боковых граней куба, согласно рис. 5.19.

Модельная задача решалась с неполными входными данными: на верхней плоскости $z = H$ как источники, так и приёмники отсутствуют. Размер расчётной области выбран приближенным к реальному, $H = 176$ мм, шаг разностной сетки составляет 0.5 мм. Приёмники располагаются на боковых и нижней грани куба с шагом 2 мм. Для вычисления градиента функционала невязки использовалось представление, полученное в главе 4:

$$\Phi'_c\ (u(c)) = \int_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)dt, \qquad \Phi'_a\ (u(a)) = \int_0^T w_t(r,t)u(r,t)dt.$$

Здесь $u(r,t)$ — решение основной задачи (5.17), а $w(r,t)$ — решение «сопряжённой» задачи при заданных $c(r)$ и $a(r)$:

$$c(\boldsymbol{r})w_{tt}(\boldsymbol{r},t) - a(\boldsymbol{r})w_t(\boldsymbol{r},t) - \Delta w(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{5.18}$$

$$w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0,$$

$$\partial_n w|_{ST} = u|_{ST} - U.$$

Искомыми функциями в коэффициентной обратной задаче являются скоростной разрез $c(\boldsymbol{r})$ и функция поглощения $a(\boldsymbol{r})$. Минимизация

функционала $\Phi(c, a)$ в такой задаче производится по векторному аргументу $\{c, a\}$ в направлении градиента grad $\Phi = \{\Phi'_c, \Phi'_a\}$. Для расчётов использовалась стандартная разностная аппроксимация, аналогичная (5.12).

Сечения фантома, использовавшегося для получения экспериментальных данных, в плоскостях $z = const$ приведены на рис. 5.20. Вверху изображён скоростной разрез $c(\boldsymbol{r})$, внизу – сечение функции поглощения $a(\boldsymbol{r})$.

На рис. 5.21 приведены сечения восстановленных трёхмерных изображений $c(\boldsymbol{r})$ и $a(\boldsymbol{r})$ в плоскостях $z = const$. На рис. 5.22 приведены сечения фантома и восстановленного изображения в плоскости $y = const$.

Эти изображения получены после 800 итераций метода градиентного спуска. Для восстановления функции поглощения требуется заметно больше итераций, чем для восстановления скоростного разреза. Поскольку расчёты для каждого источника практически независимы, они выполняются параллельно. Для расчёта использовалось 48 графических

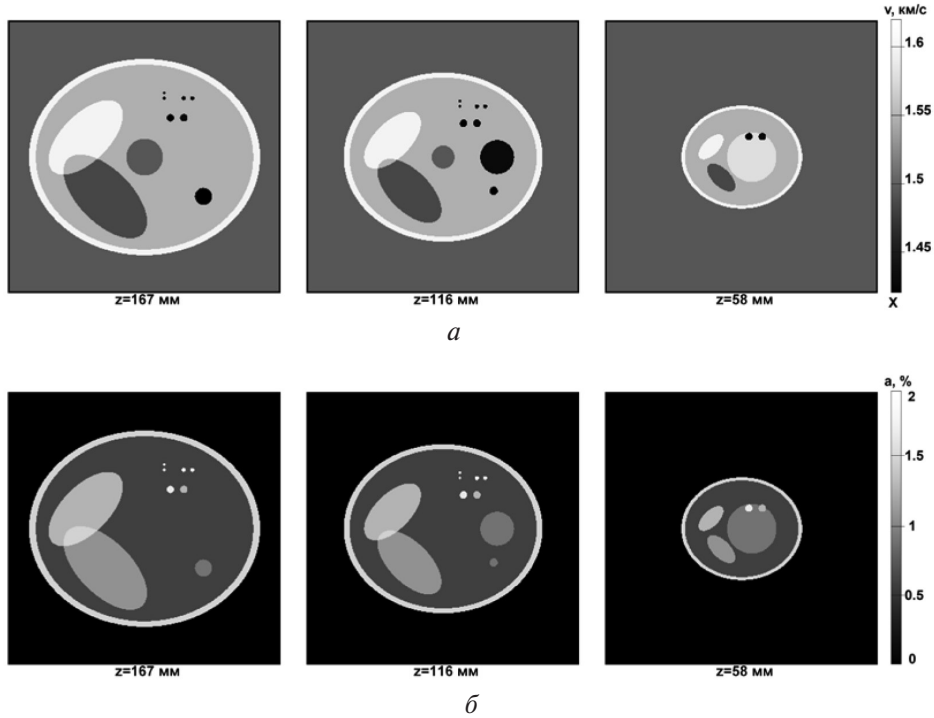


Рис. 5.20. Изображение фантома в модельной задаче реконструкции 3D объекта в модели с поглощением: *а* – скоростной разрез $c(\boldsymbol{r})$, *б* – функция поглощения $a(\boldsymbol{r})$

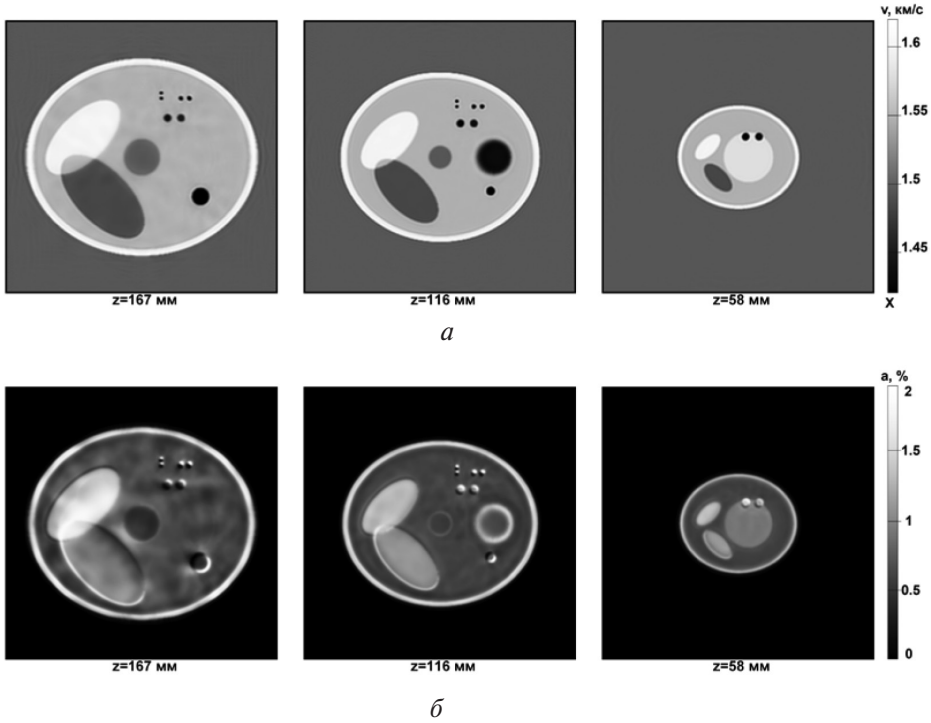


Рис. 5.21. Модельная задача реконструкции 3D объекта в модели с поглощением: *а* – сечения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ в плоскостях z = const, *б* – сечения коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$ в плоскостях z = const

ускорителей NVIDIA Tesla X2070 – по числу источников. Решение обратной задачи реконструкции скорости звука и функции поглощения заняло порядка 6 часов.

Удивительным фактом, продемонстрированным на модельном примере, является то, что использование томографических данных даже в схеме с неполными данными и при относительно небольшом количестве источников в принципе позволяет определять как скоростной разрез, так и характеристики поглощения исследуемого объекта. Однако, как видно из рис. 5.21 и 5.22, скоростной разрез восстанавливается намного лучше, чем функция поглощения.

Даже если ставить перед собой задачу восстановления только скоростного разреза, то в математической модели нужно всё равно учитывать поглощение, если оно присутствует в реальном объекте. Проиллюстрируем этот

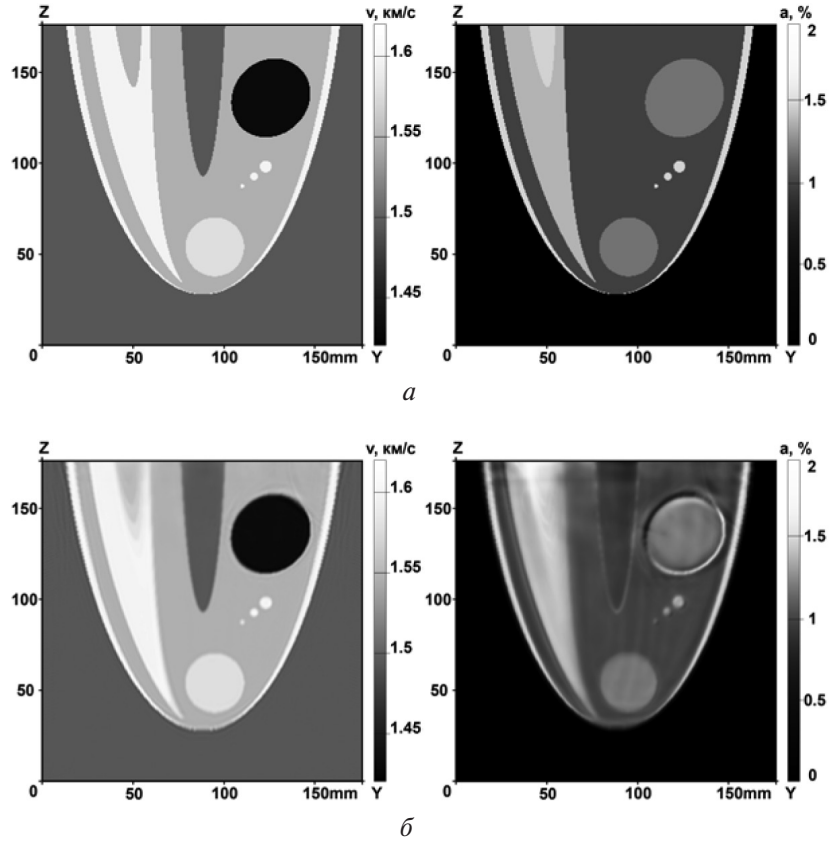


Рис. 5.22. Реконструированные сечения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ (слева) и коэффициента поглощения $a(\boldsymbol{r})$ (справа) в плоскости $y = \text{const}$:
а – фантом, *б* – восстановленное изображение

факт на примере. Попытаемся решить задачу восстановления скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$, используя модель (5.5)–(5.7), хорошо описывающую дифракционные эффекты, но не учитывающую поглощение.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Как и в предыдущей задаче, зададим трёхмерные распределения скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ и поглощения $a(\boldsymbol{r})$ согласно рис. 5.20. Источники располагаются согласно рис. 5.19. Приёмники располагаются на всех гранях куба, кроме верхней грани $z = H$. Для моделирования распространения ультразвука в среде используем уравнение, учитывающее поглощение (5.17). Решив прямую

задачу моделирования распространения ультразвукового импульса, получим экспериментальные данные на детекторах $U|_{ST}$. Для восстановления скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$ воспользуемся математической моделью, не учитывающей поглощение (5.5)–(5.11). Сечения реконструированного без учёта поглощения скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$ в плоскостях $Z = const$ приведены на рис. 5.23.

Как видно из рис. 5.23, полученное изображение по качеству не сравнимо с изображением, восстановленным в модели с поглощением. Чем больше глубина просвечиваемой ткани и, следовательно, больше поглощение, тем хуже результат реконструкции. Сравните рис. 5.23 и 5.21. Приведённый результат означает, что, даже если ставить перед собой задачу восстановления только скоростного разреза, необходимо решать эту задачу в модели с поглощением, которое также является неизвестным.

Фактор поглощения в ультразвуковой томографической диагностике рака молочной железы сильно влияет на входные данные. Поглощение в мягких тканях зависит от частоты [73]. Если на частотах порядка 0.3–0.5 МГц уровень сигнала из-за поглощения уменьшается в 2 – 4 раза, то на частотах порядка 1.5–2 МГц, а эти частоты используются в большинстве разрабатываемых в настоящее время макетов ультразвуковых томографов [16, 21, 27], сигнал на детекторах из-за поглощения в исследуемом объекте может уменьшаться в 30–40 раз. Если математическая модель не учитывает поглощение, эта разница в уровне сигнала становится погрешностью входных данных, которая в результате приводит к тому, что вы видите на рис. 5.23. Это означает, что математическая модель должна по возможности точно описывать реальный процесс. Чем точнее модель

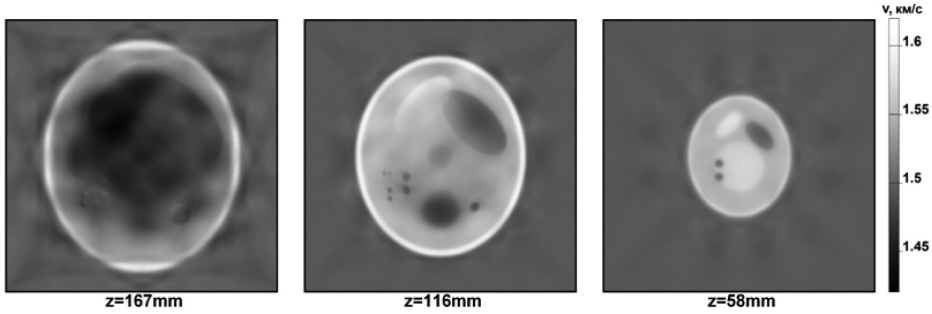


Рис. 5.23. Реконструированные без учёта поглощения сечения скоростного разреза $c(\boldsymbol{r})$ в плоскостях $z = \text{const}$

соответствует реальному процессу, тем более высокое качество изображения можно получить.

Если сравнивать полученные результаты с рентгеновской томографией, то в рентгеновской томографии восстанавливается только одна функция, характеризующая поглощение, и для её восстановления требуется намного больше положений источников и детекторов излучения. В рентгеновской томографии всегда используются схемы с вращающимся приводом, только они позволяют обеспечить достаточное количество проекций. Всё дело в том, что в рентгеновской томографии каждым детектором при фиксированном положении источника измеряется всего лишь одна величина – интегральный коэффициент поглощения по линии источник–детектор. В ультразвуковой томографии при фиксированном положении источника мы регистрируем намного большее количество информации, а именно сигнал $u(t)$ как функцию от времени, который несёт не только амплитудную информацию, но и фазовую информацию, связанную в первую очередь с задержками сигнала из-за неоднородности скорости звука. Именно фазовая информация является наиболее важной для реконструкции скорости звука.

Таким образом, проведённые модельные расчёты показывают, что разработанные алгоритмы позволяют эффективно решать обратные задачи 3D томографии непосредственно в трёхмерном варианте как для моделей без поглощения, так и для моделей, учитывающих как дифракционные эффекты, так и поглощение.

Глава 6

Суперкомпьютеры на графических процессорах в составе ультразвуковых томографических комплексов в медицине

6.1. Введение

Шестая глава книги посвящена проблемам использования суперкомпьютеров при проектировании 3D ультразвуковых томографических комплексов в медицине. Ни одно современное устройство не обходится без предварительного этапа математического моделирования. Для такого сложного устройства, как ультразвуковой томограф, требующего больших затрат для создания даже макетов, математическое моделирование для предварительной оценки параметров установки позволяет сэкономить много времени и средств. Появление мощных графических станций и суперкомпьютеров сделало возможным моделирование физических процессов распространения ультразвуковых волн в неоднородных средах. Расчёт обратных задач ультразвуковой томографии в широком диапазоне параметров томографов позволяет определить оптимальные значения этих параметров.

Одним из основных параметров ультразвуковых томографов является их разрешающая способность. Размер опухоли на ранней стадии, когда её ещё можно удалить с благоприятным прогнозом, составляет порядка 3 мм. Исходя из этого, хотелось бы иметь разрешение ультразвукового томографа не хуже 3 мм. Особенностью задач ультразвуковой диагностики мягких тканей молочной железы является то, что ультразвуковые характеристики нормальных и поражённых тканей сравнительно мало отличаются друг от друга. Так, разница в скорости распространения звука в раковых и нормальных тканях составляет не более 10 % [20, 66]. Другой особенностью рассматриваемых задач является томографическая схема с неполными данными.

Важным вопросом является выбор схемы зондирования. Все ультразвуковые приборы, используемые в настоящее время в медицине для диагностики различных заболеваний, работают по схеме на отражение.

Возможна и другая схема обследования – на прохождение. Именно такая схема используется в рентгеновской томографии. Выбор схемы 3D томографических исследований является ключевым вопросом, ответ на который даёт математическое моделирование.

Какие параметры влияют на разрешающую способность ультразвукового томографа в первую очередь? К таким параметрам относятся:

– длина волны и форма излучаемого сигнала;
– полоса пропускания электронного тракта;
– количество и расположение источников излучения;
– количество и расположение приёмников;
– точность регистрации данных;
– параметры оцифровки сигналов.

Важнейшим параметром является длина волны, или центральная частота ультразвукового источника. Теоретически, разрешение томографического комплекса, базирующегося на решении обратных задач, зависит от погрешности входных данных. При погрешности входных данных, близкой к нулю, теоретически разрешение как способность различать маленькие объекты, близкие друг к другу, можно сделать сколь угодно большим. Тем не менее в реальности разрешение тем лучше, чем меньше длина волны. При больших длинах волн для получения высокого разрешения может потребоваться настолько высокая точность измерений, что её невозможно будет реализовать на практике.

В современных рентгеновских томографах задача реконструкции искомой функции, которая представляет собой двумерный коэффициент поглощения как функцию от координат, решается на сетке в 1000×1000 и более точек. К сожалению, задачи ультразвуковой томографии намного сложнее.

Задачи ультразвуковой томографии даже в послойной томографической схеме являются нелинейными. Как было показано в главе 3, двумерные задачи ультразвуковой томографии вполне можно решать на современных суперЭВМ на сетке 1000×1000 и более. Решение трёхмерных задач волновой томографии является намного более сложным, поскольку даже на сетке $400 \times 400 \times 400$ количество неизвестных в нелинейной обратной задаче превышает 6×10^7. Современные суперкомпьютеры, оснащённые графическими процессорами, позволяют решать обратные задачи 3D ультразвуковой томографии, имеют достаточно

низкую стоимость и энергопотребление и могут быть включены в состав томографических комплексов.

6.2. Выбор оптимальной схемы томографических исследований

6.2.1. Исследование послойных томографических схем с полными данными

В главе 1 была подробно описана схема исследований в рентгеновской томографии. Рентгеновские томографы используют схему на прохождение, в которой источники и приёмники располагаются по разные стороны от исследуемого объекта, излучение проходит сквозь объект. Все существующие в медицине ультразвуковые приборы работают по схеме на отражение, когда источники и приёмники располагаются с одной стороны исследуемого объекта и улавливается отражённое от объекта излучение. В простейшем варианте УЗИ обследования при фиксированном положении излучателя врач видит на экране монитора изображение, представляющее собой развёртку по времени отражённого от внутренних органов ультразвукового сигнала в некотором диапазоне углов. В таких системах одни и те же ультразвуковые преобразователи (трансдьюсеры) являются и источниками, и приёмниками сигнала.

Важнейшим вопросом проектирования ультразвуковых томографов является выбор схемы томографических исследований. Какая из схем томографических исследований является наиболее эффективной? Решению этого вопроса и посвящён настоящий параграф.

В томографических комплексах используются данные, полученные с разных ракурсов. По аналогии с рентгеновской томографией представляется естественным ожидать, что использование томографических схем позволит более детально восстанавливать структуру неоднородного объекта по сравнению с обычными, одноракурсными диагностическими приборами. С помощью математического моделирования исследуем возможности различных схем томографии – на отражение и на прохождение, для широкого и узкого диапазона углов измерения, с использованием нескольких положений источников, окружающих объект с разных сторон. Сначала исследуем эту проблему для послойных (2.5D) схем томографии.

Для иллюстрации возможностей различных томографических схем проведём модельные расчёты двумерных задач. В схеме с полными данными детекторы располагаются на всей границе исследуемой области.

Размер расчётной области в двумерных модельных задачах составляет 200 × 200 мм, размер разностной сетки – 640 × 640 точек. Длина волны зондирующего импульса $\lambda = 5$ мм. Расстояние между детекторами составляет $\lambda/2 = 2.5$ мм. Внутри объекта скорость звука $v(\boldsymbol{r})$ изменяется в пределах 1.43–1.6 км/с, скорость звука в окружающей среде $v_0 = 1.5$ км/с. Время T регистрации сигналов составляет 250 мкс.

Зондирующий импульс в модельных расчётах задаётся с помощью начальных условий $u(\boldsymbol{r}, t_0)$ и $u_t(\boldsymbol{r}, t_0)$ или в разностной аппроксимации, $u(\boldsymbol{r}, t_0)$ и $u(\boldsymbol{r}, t_0 + \tau)$. График зондирующего импульса приведён на рис. 6.1.

Зондирующий импульс в начальный момент времени t_0 вычислялся по формуле:

$$u(\boldsymbol{r}, t_0) = \begin{cases} \sin(2\pi x/\lambda), & |0.5 + x/\lambda| \le 0.25 \\ \sin(2\pi x/\lambda)\cdot|\sin(2\pi x/\lambda)|, & 0.25 \le |0.5 + x/\lambda| \le 0.5. \\ 0, \quad |0.5 + x/\lambda| > 0.5 \end{cases} \qquad (6.1)$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определяется акустическое давление u, t_0 – начальное время моделирования, $\boldsymbol{r}_0$ – положение ультразвукового источника, $x = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - v_0 t_0$ – расстояние от фронта волны до источника, v_0 – скорость распространения звука в воде, равная 1.5 км/с, λ – заданная ширина импульса (длина волны). Такое представление зондирующего импульса в виде сферической волны, для которой достаточно

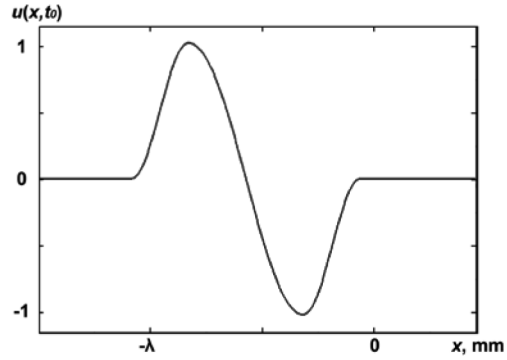


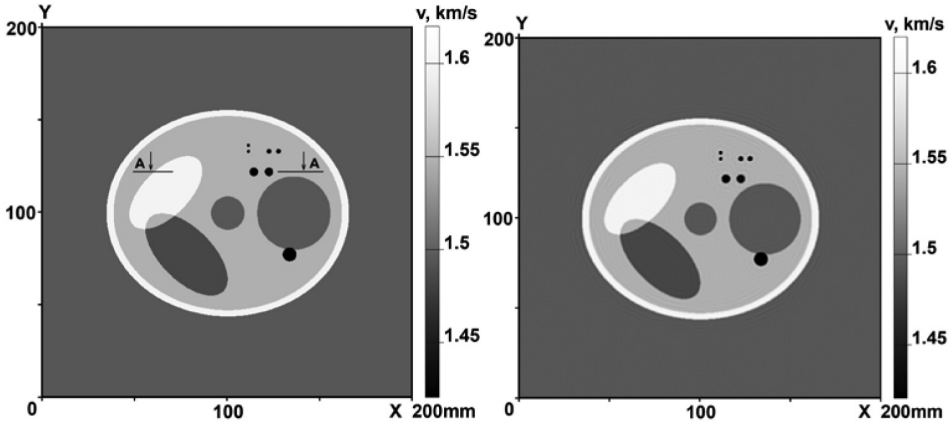
Рис. 6.1. Форма зондирующего импульса в модельных расчётах

задать только форму импульса на одном из радиусов сферы, применимо как для двумерной, так и для трёхмерной задачи. Функция $u(\boldsymbol{r}, t_0)$ должна быть достаточно гладкой, чтобы для моделирования распространения ультразвуковой волны можно было применять конечно-разностный метод.

В послойных схемах волновой томографии источники и приёмники располагаются в одной плоскости, поэтому для реконструкции скоростного разреза решается двумерная обратная задача для каждого слоя. Расположение источников и приёмников для модельных расчётов в томографической схеме с полными данными приведено на рис. 3.1. Используется 8 источников S, по 2 на каждой стороне квадрата. Приёмники располагаются по сторонам квадрата с шагом 2.5 мм.

Исходные данные для решения обратной задачи получены путём решения прямой задачи распространения ультразвука в неоднородной среде с заданным согласно рис. 6.2, *а* распределением скорости звука $c(\boldsymbol{r})$. На рис. 6.2, *б* показано восстановленное изображение.

На рис. 6.3 приведены графики сечения точного и восстановленного изображения скорости звука по оси А–А. Видно, что хорошо восстанавливаются не только границы неоднородных включений, но и абсолютное значение скорости звука. «Ringing effect», который наиболее явно наблюдается на границах включений, связан с дифракционными эффектами



а *б*

Рис. 6.2. Томографическая схема с полными данными:
а – фантом, *б* – восстановленное изображение

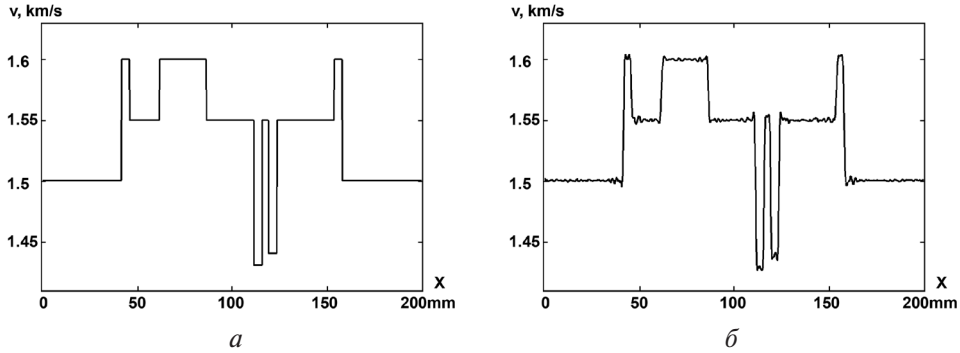


Рис. 6.3. Сечения скорости звука по оси А–А:
а – точное, *б* – восстановленное изображение

распространения ультразвуковых волн в неоднородной среде. Как будет показано далее, точность восстановления структуры исследуемых объектов можно улучшать, увеличивая количество источников.

6.2.2. Исследование послойных томографических схем на прохождение

Рассмотрим задачу послойной томографии на прохождение. В схеме на прохождение источники и приёмники располагаются по разные стороны от объекта. Приёмники регистрируют акустические волны, прошедшие сквозь объект. На рис. 6.4 приведена схема расположения источников и приёмников в модельной задаче на прохождение. Источник ультразвука располагается последовательно в 8 положениях S на границе области. Приёмники, соответствующие каждому положению источника S, расположены с противоположной стороны от исследуемого объекта. Расстояние между соседними приёмниками составляет 2.5 мм.

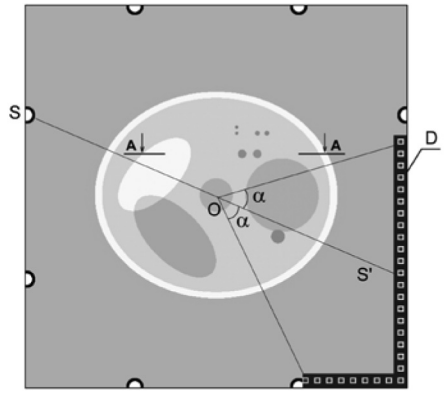
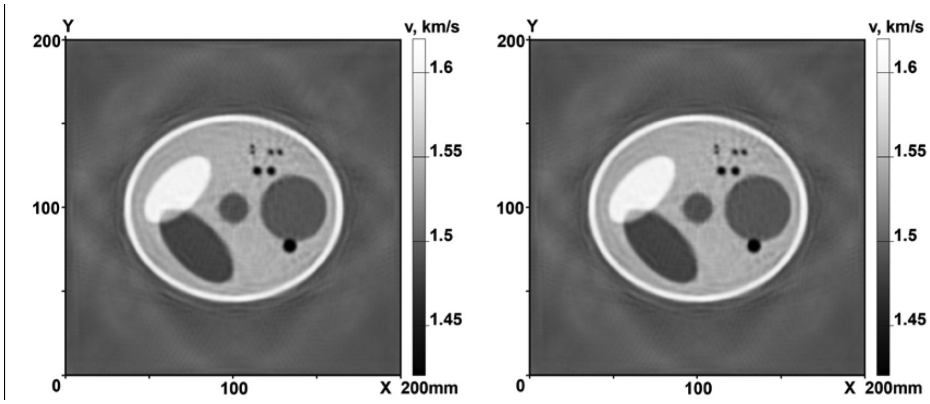


Рис. 6.4. Схема расположения источников и приёмников в томографических исследованиях на прохождение

Проведём прямую S O S’, проходящую через источник S и центр O исследуемой области. При каждом положении источника S в схеме на



а *б*

Рис. 6.5. Восстановленное изображение по схеме на прохождение: *а* – $\alpha = 45°$, *б* – $\alpha = 60°$

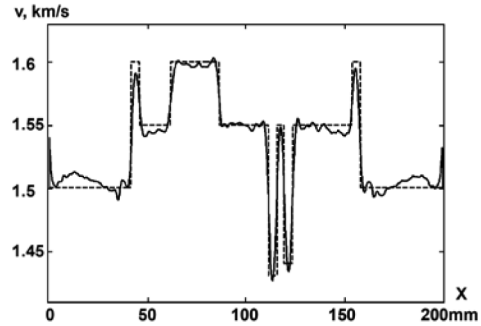


Рис. 6.6. График сечения А–А распределения скорости звука, рассчитанного по схеме на прохождение, $\alpha = 60°$

прохождение для регистрации сигнала используются только те приёмники D, для которых угол D O S’ не превосходит α. Приведём примеры восстановленных изображений для $\alpha = 45°$ и $\alpha = 60°$.

Для модельных расчётов по схеме на прохождение использовался фантом, приведённый на рис. 6.2, *б*. Восстановленные изображения при $\alpha = 45°$ и $\alpha = 60°$ приведены на рис. 6.5. Из сравнения изображений на рис. 6.3 и рис. 6.5 видно, что самые мелкие включения, которые имеют размер 2 мм, на рис. 6.5 уже практически неразличимы, что означает,

что томографические схемы с полными данными позволяют получать результаты с большей точностью, чем схемы на прохождение.

На рис. 6.6 приведён график распределения скорости звука на линии А–А для восстановленного изображения при $\alpha = 60^\circ$ (сплошная линия) и для фантома (пунктирная). Видно, что и разрешающая способность, и точность восстановления абсолютного значения скорости звука в схеме на прохождение намного хуже, чем в схеме с полными данными (рис. 6.3).

6.2.3. Исследование послойных томографических схем на отражение

Диагностические системы, работающие на отражение, широко используются как в промышленной диагностике, так и в медицине. Томографические схемы на отражение возникают, например, тогда, когда проходящую волну невозможно зарегистрировать из-за сильного поглощения ультразвука в среде или когда разместить приёмники или источники со всех сторон исследуемого объекта оказывается невозможно – например в сейсмических исследованиях [91].

Схема расположения источников и приёмников для модельной задачи на отражение приведена на рис. 6.7. Источник ультразвука располагается последовательно в 24 положениях S на границе области. Приёмники, соответствующие каждому положению источника S, располагаются с той же стороны от исследуемого объекта, что и источник S. При каждом положении источника S в схеме на отражение используются только приёмники из области R, для которых угол R O S не превосходит α. Расчёты

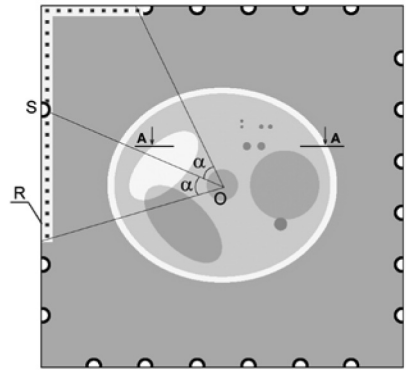
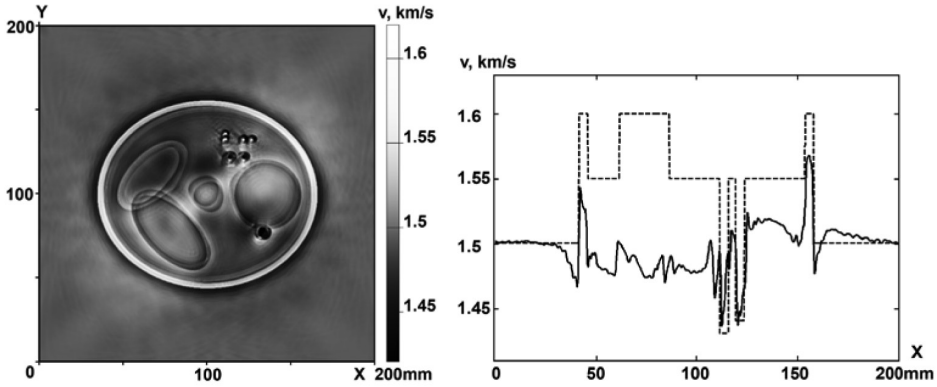


Рис. 6.7. Схема расположения источников и приёмников в томографических исследованиях на отражение



а *б*

Рис. 6.8. Восстановленное изображение в схеме на отражение:
а – изображение скорости звука $c(\boldsymbol{r})$, *б* – график скорости звука по линии А–А

проводились при $\alpha = 45°$. В модельных расчётах на отражение приёмники располагались с шагом 0.3 мм – в каждой точке разностной сетки.

Восстановленное по схеме на отражение изображение приведено на рис. 6.8, *а*. Диапазон значений скорости звука $c(\boldsymbol{r})$ внутри фантома составлял 1.43–1.6 км/с. Это изображение показывает, какой результат можно получить в рамках данной модели в идеальных условиях, при очень большом количестве приёмников и отсутствии погрешности.

На рис. 6.8, *б* приведён график распределения скорости звука на линии А–А. Как видно из рисунков, в схеме на отражение абсолютное значение скорости звука в среде не восстанавливается. Точность реконструкции скоростного разреза в схеме на отражение (рис. 6.8) несопоставима с результатом, полученным в полном диапазоне углов (рис. 6.3) и в схеме на прохождение (рис. 6.6). В томографических схемах на отражение можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей, и то с большой ошибкой.

Ситуация становится ещё хуже, если скорость звука внутри объекта варьируется в широких пределах. При увеличении диапазона изменения скорости звука в 2 раза (если скорость звука внутри фантома составляет 1.6 км/с вместо 1.55 км/с при скорости звука в окружающей среде 1.5 км/с) в результате реконструкции по схеме на отражение получается изображение, показанное на рис. 6.9. Качество восстановленного изображения

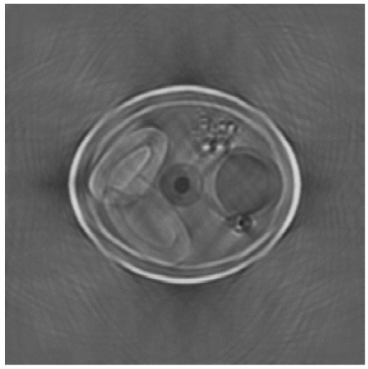


Рис. 6.9. Восстановленное 2D изображение в схеме на отражение при увеличенной вариации скорости звука внутри объекта

ухудшается. Как видно, увеличение вариации скорости звука внутри объекта приводит к появлению характерных артефактов, таких как удвоение границ и т. п.

Вышеописанная проблема является характерной не только для медицинских ультразвуковых исследований. Аналогичная проблема возникает, например, при электромагнитном зондировании приповерхностных слоёв Земли, при поиске мин, сейсморазведке, в инженерной сейсмике. Во всех этих задачах используется диагностика на отражение, где источники и приёмники расположены преимущественно только с одной стороны от объекта. При этом можно пытаться восстанавливать границы неоднородных включений, однако возможности восстановления пространственного распределения скорости распространения волн ограничены. Результаты восстановления в схеме на отражение лучше, если требуется обнаружить небольшие компактные включения, которые находятся в однородной среде. Такая задача оказывается намного проще – можно считать всю среду однородной, а неоднородности – источниками отражённого сигнала, которые нужно обнаружить [28].

Отражённый сигнал не несёт детальной информации об абсолютном значении скорости звука внутри объекта. В схеме на отражение можно определить положение границы неоднородностей, но не само значение скорости звука. В задаче ранней диагностики рака молочной железы это означает, что видимые на отражение неоднородности крайне трудно характеризовать, т. е. определить, к какому типу ткани они относятся и являются ли злокачественной опухолью. Из-за того, что скорость звука неизвестна, даже изображение границ оказывается сдвинутым вследствие рефракции.

Существуют работы, в которых авторы пытаются решать обратные задачи ультразвуковой томографии поэтапно. На первом этапе решают задачу на прохождение для приближённого вычисления скорости звука. Как было показано выше, восстановленный таким образом скоростной разрез намного хуже, чем скоростной разрез, полученный по полным

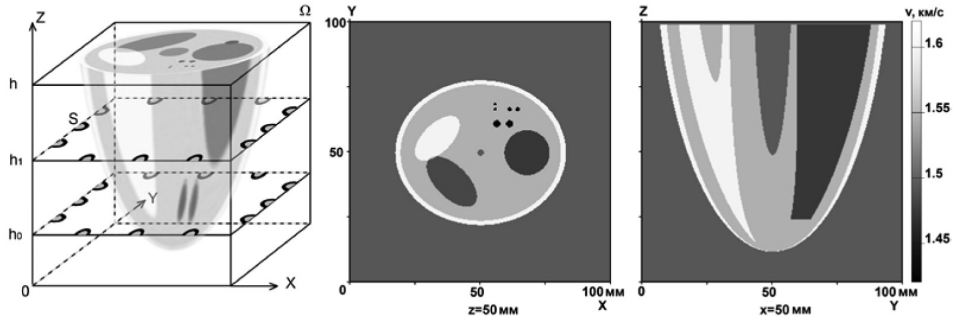
данным – как на отражение, так и на прохождение. Затем на втором этапе, используя приближённый скоростной разрез, полученный на прохождение, корректируется реконструированное изображение, полученное на отражение (refraction-corrected reflection [92]). Такая сложная конструкция используется авторами по той причине, что они используют параболическое приближение, которое неприменимо для обратной задачи с полными данными, в которой нужно учитывать волны, распространяющиеся в различных направлениях. С точки зрения авторов настоящей книги, более перспективным является решение обратной задачи с полными данными, то есть те алгоритмы, которые предложены в настоящей книге.

6.2.4. Модельные расчёты трёхмерных задач ультразвуковой томографии

В предыдущем параграфе исследовались возможности решения обратных задач ультразвуковой томографии в послойном (2D, 2.5D) варианте. Реальная задача ультразвуковой томографии является трёхмерной. В трёхмерной постановке источники и приёмники расположены на некоторой поверхности, окружающей исследуемый объект.

Обратные задачи в трёхмерном представлении с физической точки зрения являются более адекватными действительности. В рентгеновской томографии выделение двумерного слоя является оправданным, поскольку рентгеновское излучение практически не преломляется и распространяется сквозь вещество по прямой. В ультразвуковой томографии послойная постановка задачи является значительным упрощением модели с физической точки зрения из-за наличия волновых эффектов, действующих всегда в трёх измерениях. В этом параграфе сделана попытка оценить возможности различных томографических схем непосредственно в трёхмерном варианте. Поскольку трёхмерные обратные задачи являются очень сложными с вычислительной точки зрения, то для сокращения времени расчётов размер исследуемого объекта был уменьшен до ≈60 мм. Расчётная область Ω представляет собой куб размером $H \times H \times H$, где $H = 100$ мм. При шаге разностной сетки 0.3 мм количество точек сетки составляет $320 \times 320 \times 320$.

Схема трёхмерного вычислительного эксперимента показана на рис. 6.10, *а*. В модельных расчётах использовалось 24 положения источника S в двух плоскостях $z = h_0 = 0.33\ H$ и $z = h_1 = 0.66\ H$. Длина волны зондирующего импульса λ равна 5 мм, диапазон значений скорости звука внутри фантома 1.43–1.6 км/с, скорость звука в окружающей среде – 1.5 км/с.



а *б* *в*

Рис. 6.10. Трёхмерная задача с полными данными:
а – схема расположения источников, *б* – горизонтальное сечение фантома, *в* – вертикальное сечение фантома

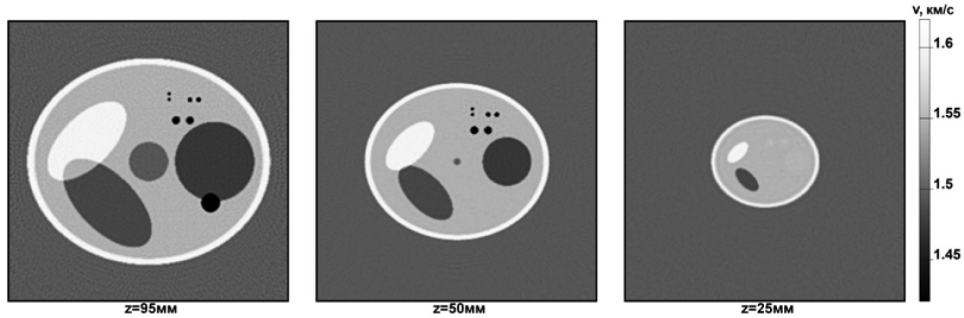


Рис. 6.11. Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме с полными данными

В томографической схеме с полными данными приёмники располагались на всех гранях куба Ω, в том числе и на нижней грани $z = 0$ и верхней грани $z = H$, с шагом 2 мм. Каждая грань куба, таким образом, является массивом из 54 × 54 детекторов. Сечения восстановленного трёхмерного распределения скорости звука в плоскостях $z = \text{const}$ показаны на рис. 6.11. Видно, что в схеме с полными данными хорошо восстанавливаются даже самые мелкие включения, диаметр которых в этом примере составляет 1 мм.

В модельной задаче на прохождение приёмники R располагались только на противоположной от источников S грани куба, как показано на рис. 6.12. Такая схема аналогична схеме рентгеновской томографии на прохождение. Для каждой из боковых граней куба данные с детекторов

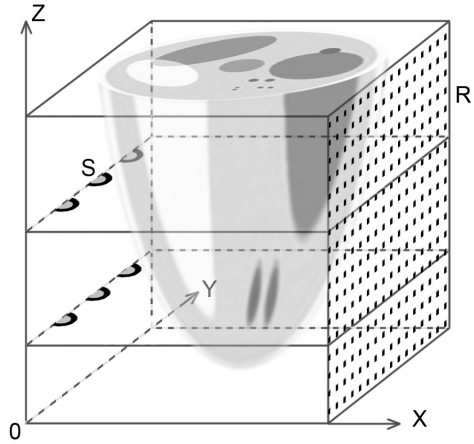


Рис. 6.12. Схема расположения источников и приёмников в модельной 3D задаче на прохождение

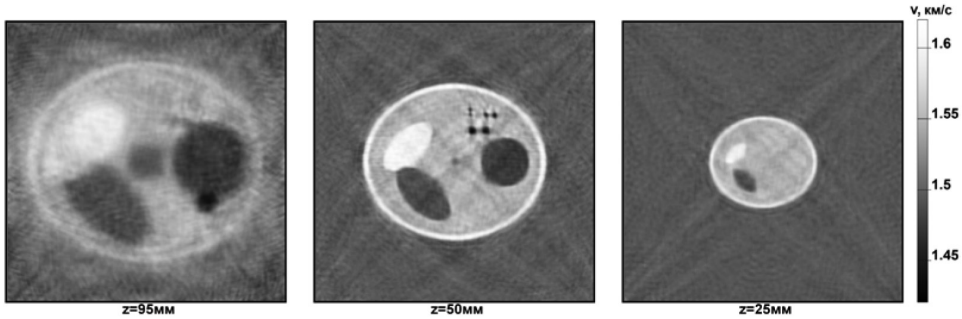


Рис. 6.13. Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме на прохождение

снимаются для 6 положений источников. Эксперимент повторяется для всех 4 боковых граней куба Ω, таким образом, всего используется 24 положения источника.

Восстановленные по схеме на прохождение изображения в плоскостях z = const показаны на рис. 6.13.

Как видно из сравнения рис. 6.11 и 6.13, качество восстановленных изображений в схеме на прохождение хуже, чем в схеме с полным диапазоном углов. Мелкие детали изображения (они имеют диаметр 1 мм) уже не различаются.

В модельной задаче, реализующей трёхмерную томографическую схему на отражение, приёмники R располагаются на той же грани куба Ω, что и источник S, как показано на рис. 6.14. Такая схема соответствует обследованию объекта с разных сторон с помощью двумерного массива ультразвуковых трансдьюсеров, содержащего источники и приёмники вместе. Подобная схема используется в существующих УЗИ аппаратах.

Восстановленное по схеме на отражение изображение показано на рис. 6.15. Как и в рассмотренном ранее 2D варианте, модельные расчёты показывают, что возможности томографических исследований 3D объектов в рамках схемы на отражение весьма ограничены. Можно определить лишь границы неоднородностей, но не распределение скорости

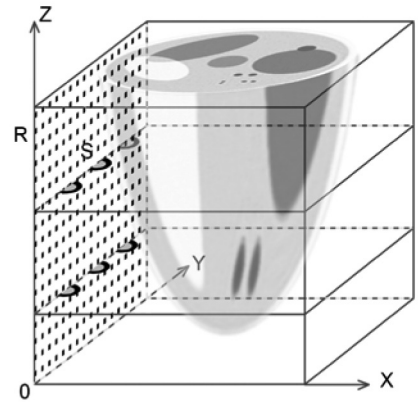


Рис. 6.14. Схема расположения источников и приёмников в модельной 3D задаче на отражение

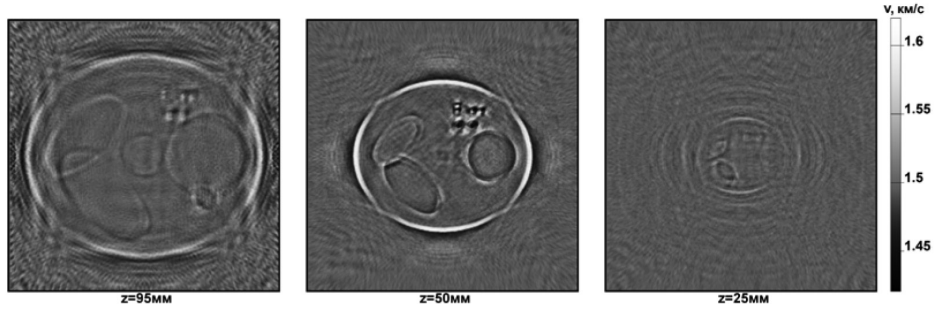


Рис. 6.15. Сечения 3D изображения, восстановленного по схеме на отражение

звука внутри объекта. Если сравнивать схему на отражение в 2D и 3D вариантах, то двумерное изображение (рис. 6.8) является некоторым идеализированным вариантом, в котором предполагается, что отражённое от неоднородностей излучение локализуется в той же плоскости, в которой расположены источник и приёмники. Более адекватным действительности является 3D вариант, в котором отражённые от неоднородностей волны могут распространяться во всех направлениях в трёхмерном пространстве. Этим можно объяснить то, что изображение, восстановленное в трёхмерной схеме на отражение (рис. 6.15) оказывается ещё хуже, чем двумерный вариант на рис. 6.8.

Таким образом, как видно из проведённых модельных расчётов, томографические схемы с полным диапазоном углов обладают безусловными преимуществами по сравнению со схемами на прохождение или на отражение. В схеме с полным диапазоном данных хорошо восстанавливается не только форма неоднородных включений, но и пространственное распределение скорости звука. Точность восстановления с полными данными заметно выше, чем в томографических схемах на прохождение. В схеме на отражение восстановление абсолютного значения скорости невозможно, можно пытаться восстанавливать только границы неоднородностей. Эти выводы справедливы как для 2D, так и для 3D томографической реконструкции.

6.3. Оптимизация параметров медицинских ультразвуковых томографов для дифференциальной диагностики рака молочной железы

6.3.1. Разрешение ультразвукового томографа, длина волны

С помощью математического моделирования определим основные параметры, которым должен удовлетворять ультразвуковой томограф для дифференциальной диагностики рака молочной железы. Среди таких параметров: разрешение как способность различать мелкие неоднородности на небольшом расстоянии друг от друга, длина волны зондирующих импульсов, количество и расположение источников и приёмников и другие. Следующей задачей является определение параметров разностных схем, точностей аппроксимации и т. д.

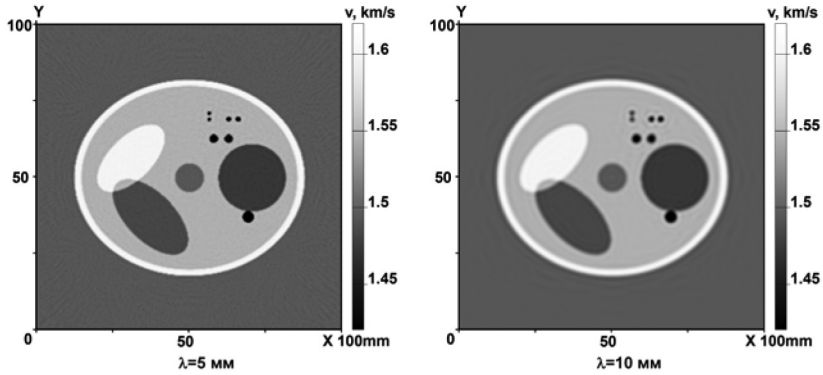
Длина волны (или длительность зондирующего импульса и его полоса частот) ультразвукового излучения является важным параметром. При

выборе оптимального для ультразвуковых томографов диапазона длин волн нужно учитывать следующий фактор. Большинство исследователей приходит к выводу, что на настоящий момент ультразвуковые томографы для диагностики рака молочной железы должны обнаруживать неоднородности размером порядка 3 мм и отличать их от окружающих тканей. Это так называемые непальпируемые неоднородности. Такой разрешающей способности достаточно для задач диагностики онкологических заболеваний на ранней стадии. Скорость звука внутри неоднородности необходимо определить с точностью до нескольких процентов, поскольку в мягких тканях скорость звука в опухоли и здоровой ткани отличается лишь незначительно. Если сравнить скорости распространения звука в таких мягких тканях, как мозг, печень, почки, мышцы, жировая ткань и т. п., то отличие их от скорости звука в воде (1.5 км/с) составляет не более 10 %. Этот факт легко интерпретировать, поскольку все мягкие ткани на 90 % состоят из воды.

Существует два основных фактора, которые влияют на выбор длины волны ультразвукового излучения. Важным фактором является уровень поглощения, который зависит от длины волны или, что то же самое, от частоты излучения. Несмотря на то, что высокие частоты, в диапазоне 1–10 МГц, широко используются в диагностической УЗИ аппаратуре, использование таких высоких частот в томографической схеме является проблематичным, поскольку требуется более высокая точность измерений. Во-вторых, разработка аппаратуры и её защищённость от помех сильно усложняется при увеличении частоты.

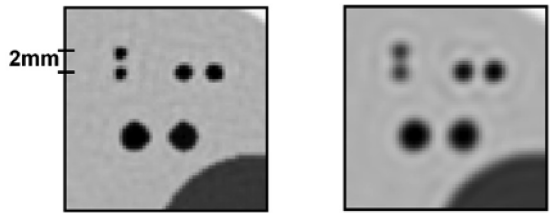
Поглощение ультразвука в мягких тканях растёт пропорционально частоте [73]. Средний коэффициент ослабления ультразвука в мягких тканях составляет примерно 1 дБ/см/МГц. Таким образом, при глубине просвечиваемой ткани 10–20 см на частоте 1 МГц ослабление сигнала составит 10–20 дБ, и измеряемое акустическое давление уменьшится до 10 раз. При длине волны порядка 5 мм (300 кГц) ослабление сигнала составит всего 2–3 раза. Это означает, что с уменьшением частоты уменьшается и погрешность экспериментальных данных, что в обратных задачах эквивалентно потенциальному повышению разрешения.

Покажем, что при длине волны порядка 5 мм вполне можно достичь разрешения порядка 3 мм. Проиллюстрируем этот факт следующими модельными расчётами 3D задач с полными данными.



а *б*

Рис. 6.16. Восстановленные сечения в плоскости $z = const$:
а – длина волны 5 мм, *б* – длина волны 10 мм



а *б*

Рис. 6.17. Увеличенные фрагменты восстановленных изображений:
а – длина волны 5 мм, *б* – длина волны 10 мм

Схема расположения источников в модельной задаче показана на рис. 6.10. Для реконструкции изображения используется 24 источника, расположенных в плоскостях $z = 0.33\ H$ и $z = 0.66\ H$. Приёмники располагаются на всех гранях куба с шагом 2 мм. Зондирующий импульс задаётся согласно рис. 6.1. Проведём модельные расчёты при длине волны зондирующего импульса 5 мм и 10 мм.

На рис. 6.16 приведены примеры восстановленного изображения в 3D схеме с полными данными при длине волны 5 мм и 10 мм. На рис. 6.17 приведены увеличенные фрагменты изображений.

Видно, что при $\lambda = 10$ мм восстановление деталей размером 2 мм уже не является удовлетворительным. Поэтому оптимальной длиной волны является $\lambda \approx 5$ мм. Отметим, что такое высокое пространственное

разрешение удаётся получать при очень низком контрасте скорости распространения звука в неоднородностях, который составляет не более 10%.

6.3.2. Количество и расположение источников и приёмников

Проведём модельные расчёты с целью определения оптимального количества приёмников и расстояния между ними и для определения необходимого количества источников. Вопрос о выборе количества источников необходимо решать совместно с вопросом о количестве приёмников. Более того, эти вопросы необходимо решать в рамках выбранной томографической схемы.

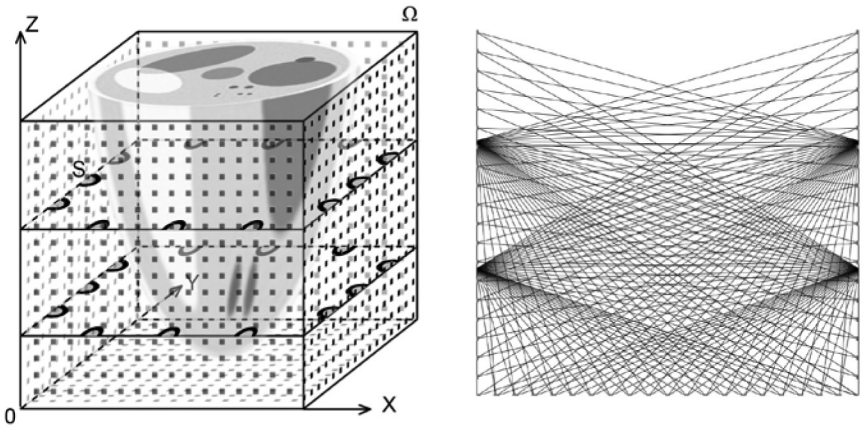
Рентгеновские томографы обычно имеют матрицу детекторов, расположенных с шагом, соответствующим требуемой разрешающей способности – порядка 0.1–0.2 мм. Источник рентгеновских лучей (либо вращающийся исследуемый объект) перемещается относительно детекторов примерно с таким же шагом. Это означает, что количество проекций, т. е. лучей от источника до детектора, в рентгеновской томографии примерно равно количеству восстанавливаемых пикселей изображения. Конструктивно такие приборы устроены достаточно сложно, требуют высокой точности изготовления для точного позиционирования источников и детекторов, имеют высокую стоимость.

Проведённые модельные эксперименты показали, что в волновой томографии можно предложить схемы, в которых для восстановления изображения источники и детекторы жёстко позиционированы и не смещаются друг относительно друга в процессе обследования, что позволяет исключить погрешность позиционирования. В волновой модели возможно достаточно точное восстановление внутренней структуры объекта даже при относительно небольшом количестве источников. Количество «проекций» (пар источник – детектор), необходимое для восстановления изображения, в волновой томографии на порядки меньше, чем в рентгеновской томографии. Это связано с тем, что в волновой томографии каждый детектор регистрирует намного больше информации – сотни отсчётов сигнала (акустического давления), изменяющегося во времени. В рентгеновской томографии детектор регистрирует только одну величину – интенсивность прошедшего сквозь объект излучения. Волновая математическая модель позволяет учесть все эти данные и определить, при какой внутренней структуре объекта будет наблюдаться данный

сигнал. Можно приблизительно оценить, что число «проекций» должно быть меньше количества пикселей восстановленного изображения примерно в 100 раз – порядка числа отсчётов по времени, в течение которого наблюдается сигнал.

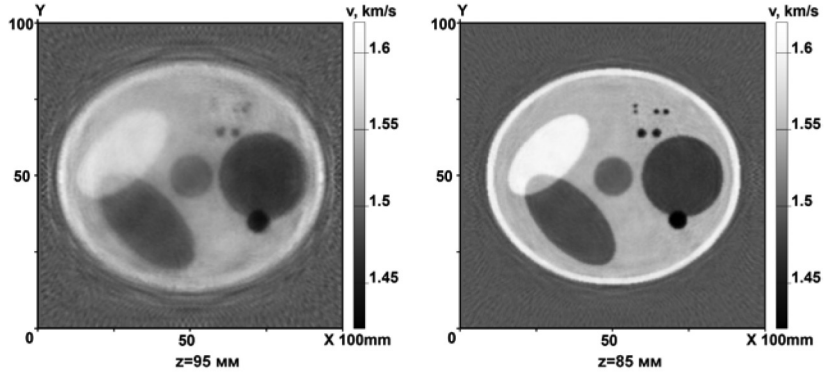
Наибольший интерес представляет обсуждение 3D схемы ультразвуковой томографии для диагностики рака молочной железы. В трёхмерном варианте томографии для диагностики рака молочной железы источники и приёмники не могут располагаться на верхней границе области. Расположим приёмники на всех остальных границах расчётной области – куба Ω, а источники – на боковых гранях куба, как и ранее (рис. 6.19, *а*).

На рис. 6.19, *б* представлена схема лучей, где каждый луч соединяет источник и приёмник. Такие схемы являются очень информативными для рентгеновской томографии. В ультразвуковой томографии имеют место эффекты дифракции, рефракции и т. п. Тем не менее, используя схему лучей (рис. 6.19, *б*), соответствующую расположению источников на рис. 6.19, *а*, становится очевидным, что информации для реконструкции изображения вблизи верхней границы $Z = H$ намного меньше, чем в средней и нижней части области. Количество «проекций», т. е. путей распространения волны от источников к приёмникам, в области около верхней границы значительно меньше.



а *б*

Рис. 6.19. Трёхмерная задача с неполными данными:
а – первый вариант схемы расположения источников и приёмников, *б* – схема расположения лучей в вертикальном сечении



а *б*

Рис. 6.20. Восстановленные сечения: *а* – при $z = 95$ мм, *б* – при $z = 85$ мм

На рис. 6.20 приведены сечения реконструированного 3D изображения в плоскостях $z = const$. Видно, что качество изображения при приближении к границе области $z = H$ заметно снижается.

Чтобы скомпенсировать недостаток количества проекций, переместим источники ближе к верхней границе, согласно рис. 6.21, *а*. Как видно из схемы лучей, приведённой на рис. 6.21, *б*, количество «проекций» по всему объёму расчётной области при таком варианте расположения источников примерно одинаково. Проведём модельные расчёты с новым расположением источников. Восстановленное изображение приведено на рис. 6.22. Качество восстановленного изображения вблизи верхней границы лишь незначительно отличается от всей остальной области.

Приведённые сечения получены при относительно небольшом количестве источников (24 источника, расположенных согласно рис. 6.21, *а*) и относительно большом количестве приёмников, расположенных на всех плоскостях, кроме $z = H$, так что расстояние между соседними приёмниками составляет 2 мм. В главе 5 на рис. 5.17 представлены результаты модельных расчётов, полученные в той же схеме расположения приёмников и источников и той же длины волны. Модельные расчёты, представленные на рис. 5.17, получены при 17 источниках. Видно, что за оптимальное количество источников можно принять 20–24.

Общее количество приёмников и общее количество источников не являются независимыми величинами. Проиллюстрировать это проще

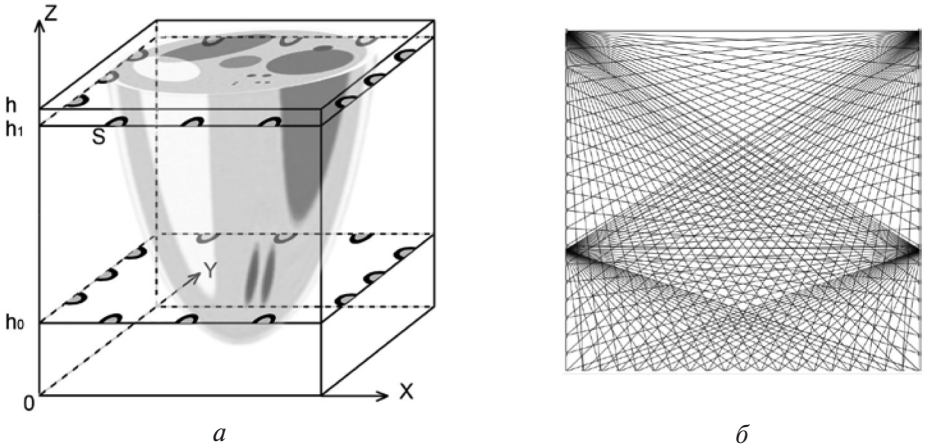


Рис. 6.21. Трёхмерная задача с неполными данными:
а – второй вариант схемы расположения источников, *б* – схема расположения лучей в вертикальном сечении

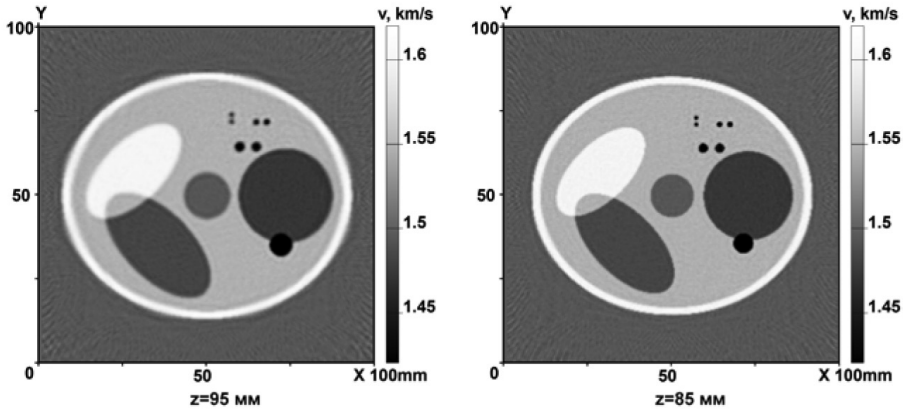


Рис. 6.22. Восстановленные изображения в 3D схеме с расположением источников согласно рис. 6.21, *а*

всего на послойных томографических схемах. В нижеследующей модельной задаче источники и приёмники располагались в одной плоскости – согласно схеме, приведённой на рис. 3.1. На рис. 6.23, *а* показано, что хорошей реконструкции в решении двумерной задачи можно добиться при небольшом количестве источников при условии, что расстояние между детекторами достаточно мало (4 источника, расстояние между

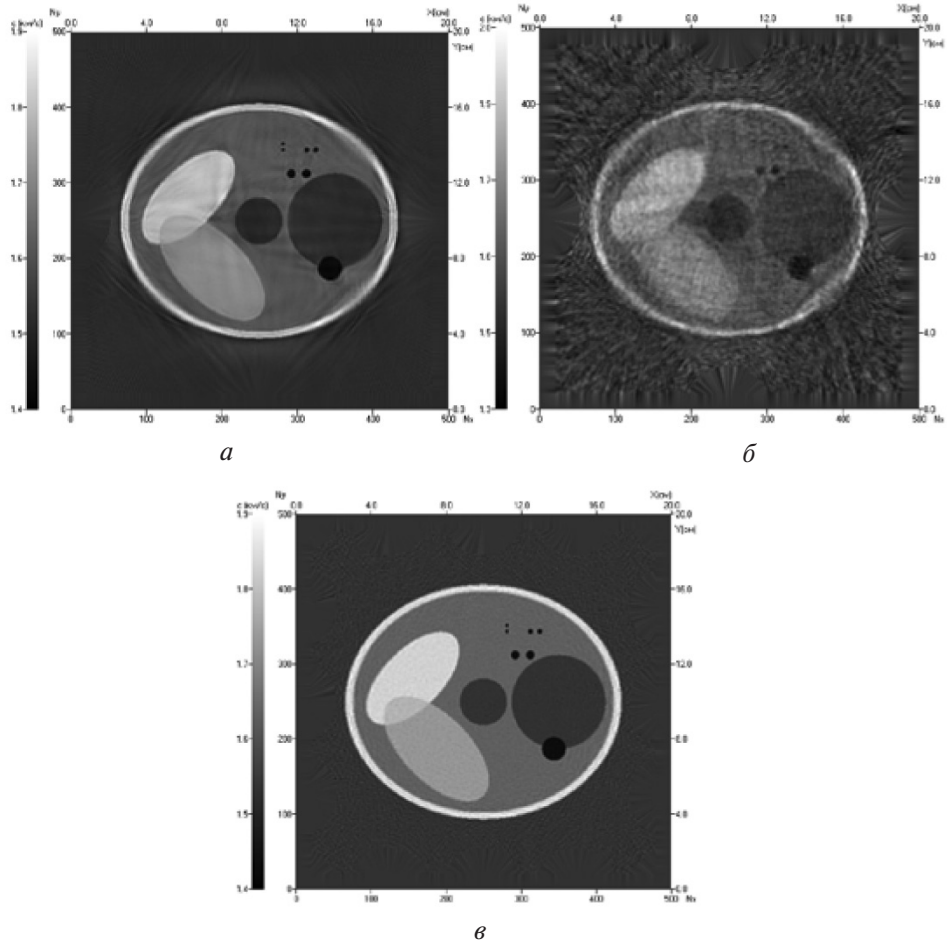


Рис 6.23. Модельные расчёты с разным количеством источников и детекторов: *а* – 4 источника, шаг между детекторами 2.5 мм, *б* – 4 источника, шаг между детекторами 15 мм, *в* – 16 источников, шаг между детекторами 15 мм

детекторами 2.5 мм). Уменьшение количества детекторов резко ухудшает реконструируемое изображение.

На рис. 6.23, *б* приведено реконструированное изображение, полученное с теми же четырьмя источниками, но при шаге между детекторами 15 мм. При фиксированном расстоянии между детекторами качество изображения можно улучшить, если увеличить количество источников. На рис. 6.23, *в* приведено реконструированное изображение, полученное при

расстоянии между детекторами 15 мм, но при 16 положениях источников. Тот же самый эффект можно продемонстрировать и в трёхмерных схемах. Хорошие результаты реконструкции можно получать при относительно небольшом количестве источников и очень большом количестве детекторов. Если расстояние между детекторами увеличивается, для получения качественных реконструированных изображений необходимо существенно увеличивать количество источников.

В главах 3, 4, 5 были предложены алгоритмы решения обратной задачи, которые легко распараллеливаются на GPU-кластерах. Каждое GPU-устройство независимо решает прямую задачу распространения волны для одного положения источника. Поэтому с точки зрения вычислительных затрат предпочтительнее конфигурация с небольшим количеством источников и большим количеством приёмников, расстояние между которыми составляет не более половины длины волны. Это подтверждено многочисленными модельными расчётами.

На физическом уровне строгости при расстоянии между детекторами менее $\lambda/2$ можно детально контролировать форму волнового фронта и, следовательно, достаточно точно определить акустическое поле внутри объекта, что очень важно для качественной реконструкции томографических изображений. В настоящее время разработаны как одномерные, так и двумерные массивы приёмников ультразвукового излучения, в которых характерные расстояния между индивидуальными приёмниками составляют порядка $\lambda/2$ и менее [93, 94].

Таким образом, как показано в главах 5 и 6, в трёхмерных схемах ультразвуковой томографии даже при небольшом количестве источников (порядка 20) при достаточно большом количестве приёмников можно добиться хорошего разрешения даже с неполным набором данных.

6.3.3. Точность регистрации входных данных

Качество реконструированных томографических изображений зависит от погрешности входных данных. Можно различать систематические ошибки, в первую очередь связанные с погрешностью модели, и ошибки измерения. Очевидно, что систематические ошибки нужно стараться уменьшать настолько, насколько это возможно. К сожалению, идеальных моделей, которые полностью совпадают с реальными физическими процессами, не существует. Всё, что касается ошибок измерения, нужно максимально оптимизировать на этапе проектирования приборов.

Одной из задач, которые необходимо решать в связи с этим, является оптимизация конечно-разностной схемы для дифференциальных уравнений и выбор метода решений конечно-разностных уравнений. Для волнового уравнения выбрана одна из простейших схем аппроксимации второго порядка точности по времени и по пространству. Выбор именно тех схем аппроксимации, которые используются в настоящей книге как для моделей без поглощения, так и для моделей с поглощением, обусловлен тем, что разработанные численные методы достаточно хорошо распараллеливаются на GPU-кластерах.

Для обеспечения высокого разрешения и корректного функционирования алгоритма реконструкции необходимо решать обратную задачу на достаточно мелкой сетке. При разрешении изображения 3 мм и общем размере области расчётов 200 мм количество точек сетки по одной координате не может быть меньше 100. Однако не менее важным является требование корректного функционирования итерационного алгоритма, в котором одним из этапов является вычисление распространения зондирующей ультразвуковой волны в пространстве. Для устойчивого моделирования процесса распространения волны необходимо как минимум 10–15 точек на длину волны. Для длины волны 5 мм шаг сетки должен составлять 0.3–0.5 мм. Тогда при размерах области расчётов 200 × 200 × 200 мм получаем требуемое количество точек разностной сетки не менее 400 × 400 × 400.

Уровень ошибки входных данных зависит как от случайных факторов, таких как наводки, шумы аппаратуры и т. д. , так и от параметров установки, которые вполне можно оптимизировать. К таким параметрам относится частота оцифровки сигнала, количество уровней оцифровки. Оба эти фактора влияют на погрешность входной информации. Обсудим, как можно оптимизировать процесс регистрации данных на примере оцифровки ультразвукового сигнала.

Частота оцифровки ультразвукового сигнала

Для цифровой обработки сигналы с детекторов акустическое давление $u(t)$ как функцию от времени необходимо дискретизировать по времени и по уровню. На рис. 6.24 приведена схема оцифровки, в которой на один период волны ультразвукового сигнала приходится 9 отсчётов, по горизонтали отложено время, по вертикали – амплитуда сигнала. На

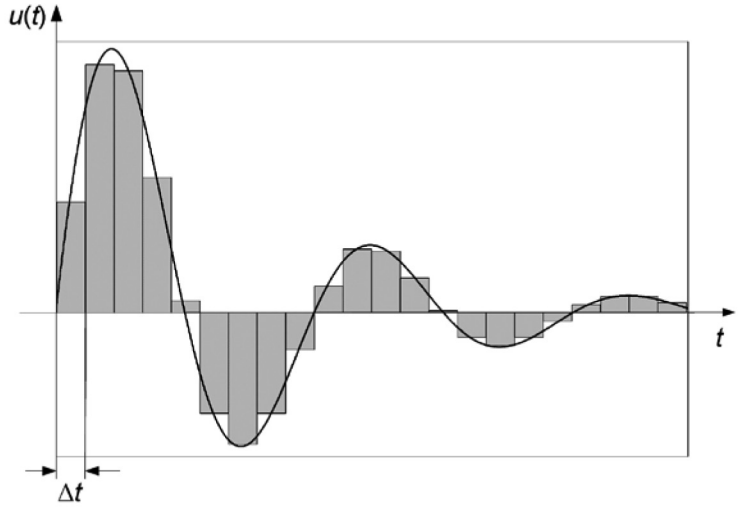
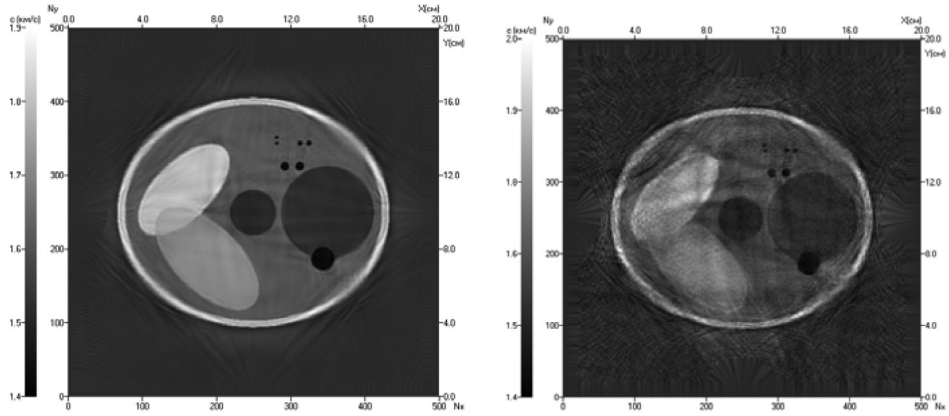


Рис. 6.24. Иллюстрация частоты оцифровки сигналов детекторов

выходе оцифровки получаются отсчёты, представляющие собой средние значения сигнала за период отсчёта Δt.

Диапазон возможных значений частоты оцифровки ограничен сверху частотными характеристиками аналого-цифровых преобразователей (АЦП), используемых при регистрации и оцифровке ультразвукового сигнала, а снизу – возможностью корректной регистрации синусоидальной функции: наибольшая частота сигнала должна быть ниже частоты Найквиста – половины частоты оцифровки [95]. Для рассматриваемых частот сигнала до 0.5 МГц частота оцифровки в 20 отсчётов на период сигнала, т. е. 10 МГц, для современной микроэлектроники не является большой проблемой. С другой стороны, как показывают модельные расчёты, при больших частотах оцифровки разрешающая способность уже не увеличивается, поэтому использование слишком больших частот оцифровки не имеет смысла. Регистрация менее чем 2 отсчётов на период волны не удовлетворяет условию теоремы Котельникова [95] (хотя, как показывают модельные расчёты, недостаток отсчётов по времени можно компенсировать избытком отсчётов по пространству, т. е. увеличением количества приёмников).

Для выбора оптимальных параметров дискретизации были проведены модельные расчёты для послойной томографической схемы. Использовалось 4 источника, расположенных на серединах сторон квадратной



а *б*

Рис. 6.25. Модельные расчеты для разного количества отсчётов по времени: *а* – 10 отсчётов, *б* – 1 отсчёт на период волны

расчётной области. На рис. 6.25 приведены реконструированные изображения для 10 и 1 отсчёта на период волны по времени, т. е. частот оцифровки 3 и 0.3 МГц. Хорошее качество реконструкции удаётся получить при 10 отсчётах на период волны.

При дальнейшем увеличении частоты оцифровки качество реконструкции уже не улучшается. Удивительным фактом является то, что даже при одном отсчёте на период удаётся получить изображение. При достаточно большом количестве приёмников даже при одном отсчёте на период волны приёмники регистрируют достаточно информации, чтобы грубо восстановить основные характеристики неоднородностей.

Количество уровней оцифровки сигнала

Цифровое представление физической величины всегда отличается от её реального значения. Это отличие является погрешностью оцифровки, которую приближённо можно определить через количество уровней оцифровки сигнала. На рис. 6.26 приведена схема оцифровки, в которой используется шаг квантования по уровню Δy. По горизонтали отложено время, по вертикали – амплитуда сигнала. В результате округления входных данных до ближайшего уровня мы получаем оцифрованный сигнал $y(t)$. Разность между оцифрованным сигналом и точным средним значением сигнала $u(t)$ за период отсчёта Δt составляет погрешность оцифровки – ε. Погрешность округления не превосходит $\pm 0.5\Delta y$.

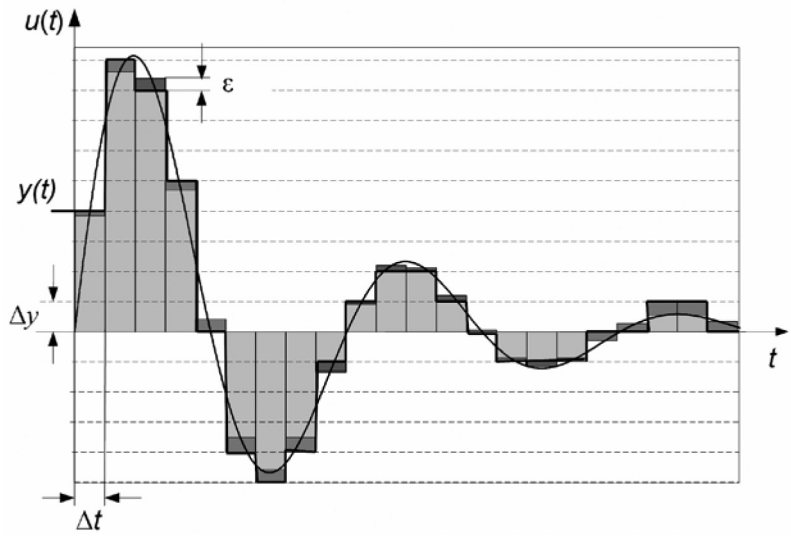


Рис. 6.26. Иллюстрация погрешности оцифровки сигнала

Диапазон возможных значений количества уровней оцифровки ограничен сверху характеристиками АЦП устройств, используемых при регистрации ультразвукового сигнала. Для современных устройств количество уровней оцифровки может достигать величины 256–65536 (8–16 бит). Как показывают модельные расчёты, при количестве уровней оцифровки больше 1024 (10 бит) качество реконструкции стабилизируется и при дальнейшем увеличении количества уровней уже не улучшается, поэтому использование большего числа уровней не имеет смысла. Таким образом, устройство оцифровки данных томографического комплекса должно обеспечивать точность оцифровки как минимум 10 бит.

Общую погрешность оцифровки можно уменьшать как увеличением точности оцифровки (уменьшением Δy), так и повышением частоты оцифровки, т. е. уменьшением Δt. Можно рассматривать несколько усреднённых по времени отсчётов как один отсчёт с более низкой частотой и большей точностью оцифровки.

Уровень погрешности входных данных

Погрешность входных данных складывается из целого ряда факторов, таких как случайные ошибки, погрешности при оцифровке данных и т. д. Очевидно, что чем меньше уровень погрешности входных данных, тем

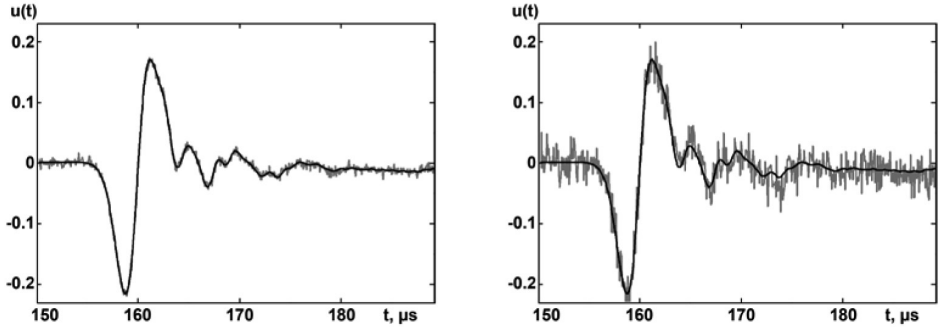
выше качество реконструкции изображения. Для определения допустимого уровня погрешности входных данных проведём модельные расчёты. В модельных задачах сигналы на детекторах $u(t)$ рассчитывались как решение прямой задачи распространения ультразвука (5.5)–(5.7). Возмущённые данные $u_\delta(t)$ на каждом из детекторов генерировались с помощью датчика псевдослучайных чисел: $u_\delta(t) = u(t) + \delta\varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t)$ – случайная величина со стандартным нормальным распределением, выбираемая с частотой оцифровки сигнала (10 МГц).

Определим предельное значение погрешности, при которой можно качественно восстановить изображение. Для этого проведём модельные расчёты с неточными входными данными.

Уровень погрешности входных данных δ будем оценивать относительно максимальной амплитуды сигнала на детекторах $2\max\limits_{S,t}|u|_{ST}$, которая принимается за 100 %. На рис. 6.27 приведены смоделированные входные данные $u_\delta(t)$ на детекторах при уровне погрешности δ = 1.5 % и δ = 5 %.

Приведём результаты модельных расчётов с погрешностью для трёхмерной томографической схемы с полными данными (рис. 6.10). Источники расположены в плоскостях Z = 0.33 h и Z = 0.66 h, расстояние между приёмниками составляет 2.5 мм. На рисунке 6.28 приведены решения модельной задачи для возмущённых данных с уровнем погрешности 1.5 % и 5 %.

Из представленных рисунков видно, что при уровне погрешности 1.5 % удаётся получить реконструированное изображение высокого



а *б*

Рис. 6.27. Входные данные с детекторов с погрешностью: *а* – δ = 1.5 %, *б* – δ = 5 %

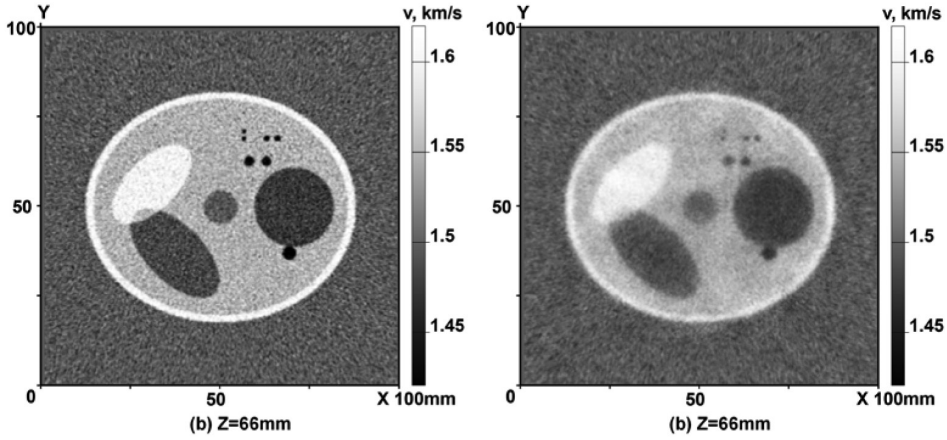
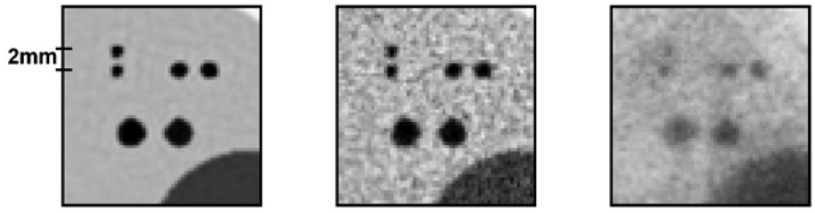


Рис. 6.28. Восстановленные изображения при уровне погрешности 1.5 % и 5 %



а – δ = 0 *б* – δ = 1.5 % *в* – δ = 5%

Рис. 6.29. Увеличенные фрагменты изображений, полученных с разной погрешностью

разрешения. При погрешности 5 % реконструированное изображение ещё содержит информацию обо всех элементах фантома, но разрешающая способность заметно ухудшается.

Сравнение изображений (рис. 6.29) показывает, что уровень погрешности входных данных является важным параметров, качество восстановления изображения заметно улучшается при уменьшении погрешности, и задача томографической аппаратуры – сделать эту погрешность как можно меньше. Таким образом, ориентиром при проектировании должен служить суммарный уровень погрешности входных данных не более 4–5 %.

Случайную погрешность можно в некоторой степени компенсировать увеличением количества приёмников или повторными измерениями,

увеличивая общее количество отсчётов. Среднеквадратичное отклонение уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из количества отсчётов.

Таким образом, погрешность входных данных является одним из основных факторов, который влияет на качество реконструированных изображений и разрешающую способность. Существуют систематические ошибки, в первую очередь это ошибки модели. Используемая в книге модель скалярного волнового уравнения не является идеальной. Кроме продольных волн, в упругом теле могут распространяться и поперечные волны, поверхностные волны и т. п. С этой точки зрения, в принципе, более адекватными физическим процессам являются тензорные модели [96]. Такие модели необходимо использовать в первую очередь для диагностики внутреннего строения твёрдых тел. Для мягких тканей использование тензорных моделей сильно усложняет обратные задачи и не гарантирует большую адекватность модели. Однако даже в используемой постановке скалярных волновых моделей обратные задачи 3D волновой томографии являются чрезвычайно сложными и требуют использования для их решения современных суперкомпьютеров. Поэтому на данном этапе разработки ультразвуковых томографов нет причин использовать более сложные модели, чем рассмотренные в книге.

Таким образом, посредством математического моделирования определены оптимальные значения параметров ультразвуковых томографов:

1) длина волны излучения ≈5 мм,

2) частота оцифровки сигнала по времени – от 10 до 20 отсчётов на период основной частоты сигнала,

3) количество уровней оцифровки сигнала – не менее 1024,

4) уровень погрешности входных данных – не более 5 %,

5) количество источников – не менее 20,

6) расстояние между приёмниками – от половины длины волны до двух длин волн,

7) размер области ультразвукового зондирования ≈20 × 20 × 20 см,

8) количество точек сетки по пространственным координатам – 400–500.

В этой главе мы обсуждали некоторые факторы, которые влияют на погрешность входной информации. Существует большое количество факторов, которые мы не включили в рассмотрение. К ним относятся,

например, полоса пропускания электронного тракта. В ультразвуковой томографии используются короткие зондирующие импульсы. Такие импульсы имеют широкий спектр. Полосу частот сигнала можно определить, вычислив преобразование Фурье от этого сигнала по времени. Для короткого импульса ширина спектра примерно равна центральной частоте, например для центральной частоты 300 кГц получится полоса частот 150–450 кГц. Полоса пропускания электронного тракта должна быть шире, чем полоса частот сигнала. В какой-то мере частота оцифровки связана с полосой пропускания. В конечном итоге полоса пропускания является одним из основных параметров при проектировании электронного тракта ультразвуковых томографов.

Отдельной проблемой является генерация импульсов заданной формы. В последние 10 лет разработаны новые типы пьезокерамики, которая позволяет решать различные задачи генерации ультразвуковых импульсов. Существуют хорошие математические модели, которые используются при решении задач формирования ультразвуковых сигналов. Разработка ультразвуковых приёмников и трансдьюсеров (приёмников-излучателей) является сложной задачей, включающей в себя математическое моделирование распространения механических и электрических колебаний в материалах [93, 94].

6.4. Возможности суперкомпьютеров общего назначения и GPU-кластеров для решения обратных задач ультразвуковой томографии

6.4.1. Архитектура и особенности программирования графических процессоров

Высокопроизводительные вычисления немыслимы без параллельных архитектур [97]. Графические процессоры стали первой широкодоступной архитектурой, в которой применяется массовый параллелизм. Благодаря огромным объёмам выпуска и, следовательно, низкой цене, они стали оптимальным решением для широкого круга вычислительных задач. Из распространённых на сегодня систем графические процессоры имеют самую низкую стоимость в пересчёте на один ТФлопс пиковой производительности вычислений и находятся на первых местах по энергоэффективности. В настоящее время графические процессоры успешно применяются для ускорения расчётов в различных областях науки [98, 99].

Всё это делает GPU привлекательным средством для построения параллельных вычислительных систем, от мощных персональных компьютеров, оснащённых несколькими графическими ускорителями, до суперкомпьютеров с тысячами вычислительных узлов. Последние модели графических карт объединяют на одной плате по два GPU-устройства, что позволяет установить даже в относительно недорогой персональный компьютер до четырёх устройств.

Современные GPU объединяют на одной плате несколько вычислительных ядер (или мультипроцессоров, MP), кэш-память (локальную память каждого ядра) и массив высокопроизводительной глобальной оперативной памяти, к которой имеют доступ все мультипроцессоры (рис. 6.30, *а*). Графические процессоры NVidia типично содержат 10–20 мультипроцессоров. Каждый из них содержит сотни арифметико-логических устройств (АЛУ) и способен обрабатывать сотни (типично 512–1024) параллельных потоков, что позволяет достичь огромной пиковой производительности GPU в несколько терафлопс.

Оперативная память GPU имеет объём 1–4 ГБайт и пропускную способность 150–300 ГБайт/с, в то время как системная память (RAM), используемая обычно в компьютерах, имеет значительно более низкую пропускную способность, 8–15 ГБайт/с, но больший объём. Во многих задачах пропускная способность памяти является узким местом, особенно в последнее время, когда с развитием электроники производительность

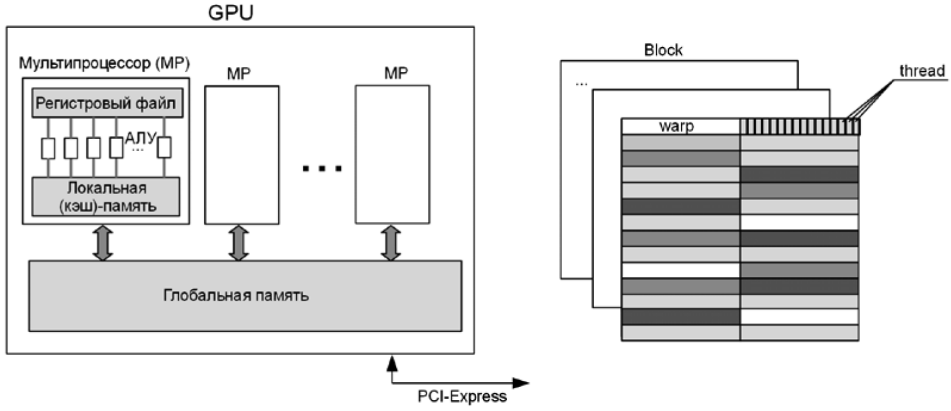


Рис. 6.30. Графический процессор:
а – блок-схема устройства, *б* – структура выполняемых параллельных потоков

и количество арифметических устройств в составе процессоров растёт непропорционально быстрее производительности оперативной памяти.

Структура параллельных потоков, исполняемых на GPU, приведена на рис. 6.30, *б*. Все параллельные потоки, обрабатываемые одним мультипроцессором (MP), образуют блок (block). В графических процессорах разные блоки параллельных потоков не могут обмениваться информацией друг с другом. Планировщик GPU запускает блоки на исполнение на освобождающихся ядрах в произвольном порядке.

Графический процессор является SIMD-устройством. Минимальной программной единицей, которую может выполнить GPU, является warp, который содержит, в зависимости от устройства, 8–32 параллельных потоков (thread). В большинстве графических ускорителей эти потоки могут выполнять только одну и ту же команду над различными данными. GPU содержит схему ускоренного доступа к памяти, когда потоки внутри одного warp обращаются к последовательным ячейкам памяти. В некоторой степени warp аналогичен SIMD-регистрам, имеющимся в современных процессорах общего назначения, где реализованы расширения SSE, AVX и т. п. [100]. Поэтому первое измерение (x) обрабатываемого на GPU массива данных должно быть параллельным – наибольшая эффективность выборки данных из памяти достигается, когда каждый поток обрабатывает один элемент данных. Таким образом, наибольшее ускорение достигается графическими процессорами на SIMD-задачах, где имеется большое количество одинаковых параллельных потоков.

Пиковой производительности графические процессоры достигают на арифметически-интенсивных задачах – таких, где количество арифметических операций намного превосходит количество операций обращения в память. Как и в большинстве современных процессоров, производительность арифметических устройств в составе GPU во много раз превосходит производительность памяти и каналов обмена данными. На арифметически-интенсивных задачах (например, таких как преобразование Фурье) ускорение расчётов на GPU по сравнению с обычным процессором может достигать сотен раз.

За счёт наличия высокопроизводительной оперативной памяти современные графические процессоры позволяют получить существенный выигрыш и на data-intensive задачах, которые содержат относительно немного арифметических операций и много операций обращения в память. Именно к таким задачам относится явная разностная схема.

Однако объём оперативной памяти, установленной на GPU, ограничен, а наиболее узким местом GPU является связь с компьютером – интерфейс PCI-Express. Этот интерфейс имеет относительно низкую пропускную способность (единицы ГБайт/с), что делает невыгодным выполнение на GPU задач, требующих постоянного доступа к большому объёму оперативной памяти – большему, чем установлено на GPU. Поэтому на таких задачах, как, например, базы данных, центральный процессор покажет лучшую производительность, чем GPU. Это ограничение принято во внимание при построении алгоритма расчёта обратной задачи ультразвуковой томографии.

Таким образом, если задача умещается во внутренней оперативной памяти GPU, то только за счёт более быстрой памяти графические процессоры позволяют ускорить расчёты по сравнению с персональным компьютером теоретически в 20–30 раз. Реальное ускорение может достигать 50–100 раз за счёт более эффективной компиляции кода на GPU, больших регистровых файлов и т. п.

Для программирования GPU существуют различные интерфейсы, такие как DirectX, OpenGL, OpenCL, NVidia CUDA, OpenACC и прочие. Интерфейсы DirectX и OpenGL ориентированы на обработку изображений и рендеринг 3D моделей. Они предоставляют доступ к базовым функциям GPU и поддерживаются практически всеми устройствами. NVidia CUDA и OpenCL – это средства программирования более широкого круга задач (GPGPU – General Purpose GPU computing). Они поддерживаются относительно новыми графическими процессорами, имеющими универсальные арифметические устройства-шейдеры (unified shaders). Эти средства программирования можно использовать совместно с OpenGL. OpenGL и OpenCL [101] являются библиотеками системных функций, они переносимы и могут быть вызваны практически из любой среды, в которой может быть написана управляющая программа, вплоть до web-браузера. Выполняемые на GPU функции (шейдеры) пишутся для одного потока, и запускается нужное число параллельных потоков. Такой подход позволяет очень легко запрограммировать задачи с большим количеством одинаковых потоков (SIMD/SPMD).

OpenACC [102] представляет собой набор директив для компиляторов языков высокого уровня, в которых указывается, какие участки кода нужно выполнить параллельно. OpenACC может применяться для любых

параллельных процессоров и систем, не только графических. При отсутствии графического ускорителя программа может быть скомпилирована обычным образом и сохраняет работоспособность. Распараллеливание производится компилятором автоматически.

NVidia CUDA [103] представляет собой и библиотеку системных функций, и надстройку над компиляторами – собственный препроцессор, обрабатывающий директивы на этапе компиляции и разделяющий программу на CPU и GPU части. Эта система наиболее проста для обучения, но применима только для графических процессоров NVidia и требует дополнительного программного обеспечения.

Нами был использован интерфейс OpenCL, который применим для широкого класса параллельных вычислительных устройств, включая современные многоядерные процессоры. Также OpenCL позволяет легко синхронизировать работу центрального процессора и GPU.

6.4.2. Распараллеливание явной разностной схемы и её масштабируемость

Типичный способ моделирования физических процессов во времени конечно-разностным методом на многопроцессорной системе состоит в том, что объём данных делится на области, обрабатываемые каждым процессором, и для каждого шага по времени производится обмен граничными данными между соседними процессорами (рис. 6.31).

Как в двумерном, так и в трёхмерном случае отношение объёма обрабатываемых каждым процессором данных к объёму передаваемых по каждому каналу данных пропорционально линейному размеру области – n.

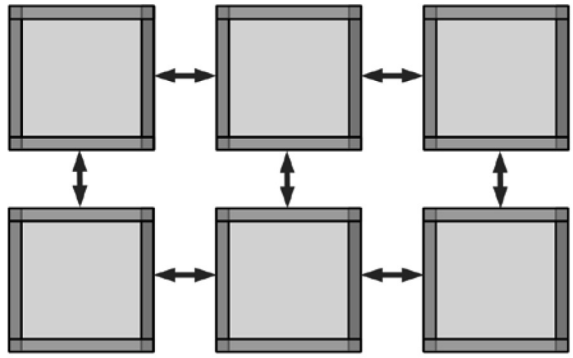


Рис. 6.31. Распараллеливание разностной схемы на многопроцессорной системе

Для простейшей модели процесса вычислений (если передача данных осуществляется параллельно с обработкой) время T выполнения одного шага моделирования по времени имеет вид

$$T = \max(A/B_{\text{а}}, C/B_{\text{с}} + L), \tag{6.1}$$

где A – объём обрабатываемых каждым узлом данных, $B_{\text{а}}$ – производительность вычислений одного узла, C – объём передаваемых данных для одного узла, $B_{\text{с}}$ – пропускная способность коммуникационной сети, L – задержка распространения сообщений в сети. В реальности производительность $B_{\text{а}}$ также может сильно зависеть от самого объёма обрабатываемых данных A ввиду наличия кэш-памяти определённого объёма или более сложной иерархии памяти.

Таким образом, для простейшей модели минимальное время выполнения одного шага по времени составляет L и достигается в конфигурации, где на каждый процессор приходится один элемент. Максимальное время выполнения составляет $V/B_{\text{а}}$ и достигается в конфигурации, где весь объём данных V приходится на один процессор.

Соотношение (6.2) справедливо и для любых более крупных единиц вычислительной системы – вычислительных узлов, стоек и т. д. Скорость расчётов ограничивается либо вычислительной мощностью, либо пропускной способностью коммуникаций. Для явной разностной схемы, распараллеленной согласно рис. 6.31, значения A и C связаны соотношением $C = A/n$, где n – размер разностной сетки по каждому измерению. Таким образом, максимальная эффективность распараллеливания достигается при выполнении соотношения $n/B_{\text{а}} = 1/B_{\text{с}} + L$, когда время, затрачиваемое на передачу данных, равно времени, затрачиваемому на их обработку, и потери времени на ожидание данных отсутствуют (если передача данных осуществляется параллельно с обработкой).

В первом приближении, если считать задержку L достаточно малой, получим $B_a/n = B_c$. Это означает, что для эффективного распараллеливания явной разностной схемы размерность задачи для каждого узла должна быть примерно равна отношению производительности вычислений к пропускной способности коммуникаций. Типичные соотношения для современной техники составляют $B_c \approx 1$ ГБайт/с, $B_a \approx 100$ ГБайт/с (при использовании в основном кэш-памяти), оптимальная размерность задачи для каждого процессора $n \approx 100$. Поэтому явная разностная схема имеет довольно ограниченную масштабируемость.

В тех задачах, где это возможно, для применения на мощных суперкомпьютерах стараются использовать методы, не включающие расчёты во времени – неявные, итерационные и т. д., которые требуют меньшего числа передач данных. Для гиперболических уравнений такие методы требуют огромных массивов данных – порядка X × Y × Z × T, то есть порядка терабайт оперативной памяти. Поэтому такие методы эффективны при большом масштабе расчётов – с использованием тысяч вычислительных узлов, но неэффективны при относительно небольшом масштабе расчётов. При использовании явной разностной схемы можно ограничиться лишь объёмом данных X × Y × Z, проводя вычисления по времени T последовательно. Такой метод очень эффективен при небольшом масштабе, но теряет эффективность при большом количестве вычислительных узлов. Пока мощность вычислительного комплекса, входящего в состав томографа, достаточно ограничена, проблем с масштабируемостью явной разностной схемы не возникает.

На графических процессорах схема расчётов с обменами граничными данными (рис 6.31) может быть реализована лишь между различными GPU устройствами, но не между ядрами (мультипроцессорами) в составе одного устройства. В отличие от многоядерных и многопроцессорных систем общего назначения, синхронизация и обмен данными между различными ядрами GPU, как правило, невозможны, поэтому для эффективного распараллеливания на GPU задача должна быть разделена на достаточно большое число полностью независимых блоков. Графические процессоры ориентированы на распараллеливание по данным, когда каждый из блоков обрабатывает свою область данных – например, часть изображения, не пересекающуюся с другими частями. Правильное прочтение данных одним ядром, если они были записаны другим ядром, в GPU не гарантируется, поэтому выходные данные не должны пересекаться с входными данными.

Принимая во внимания эти особенности графических процессоров, можно обозначить два распространённых метода распараллеливания разностных схем на GPU. Первый метод состоит в записи результатов расчёта каждого шага по времени в оперативную память. После того, как все результаты для одного шага по времени будут получены, можно начать вычисление следующего шага. Такой метод эффективен для 3D задач. Для 2D задач затраты времени на перезапись значений в памяти и

перезапуск вычислений после каждого шага разностной схемы по времени оказываются очень велики, поскольку каждый поток выполняет всего лишь несколько операций, после чего завершается.

Второй метод состоит в том, что каждым потоком обрабатывается несколько (m) шагов по времени, но при этом нужно в каждом блоке загрузить больше исходных данных – достаточных для выполнения всех m шагов (рис. 6.32).

При таком способе распараллеливания расчётов области выходных данных каждого блока не пересекаются, но области исходных данных пересекаются, эти пересечения приходится обсчитывать повторно, и за счёт этого производительность в некоторой степени будет потеряна. Для получения $n \times n$ результатов нужно загрузить $(n + 2m) \times (n + 2m)$ исходных данных. Такой подход может быть эффективен для 2D задач, но в 3D задачах объём данных как функция загруженного количества шагов $A = (n + 2m)^3$ растёт настолько быстро, а размер n, при котором этот объём данных умещается в локальную память GPU (её объём типично составляет 16–64 КБайт), настолько мал, что такой способ оказывается невыгодным – время загрузки и обсчёта дополнительных данных оказывается больше времени записи одного шага по времени (n^3) в память.

Реальные соотношения производительности того или другого метода зависят от конкретного устройства. В настоящее время разрабатываются программы, автоматически распараллеливающие простые алгоритмы типа разностных схем оптимальным образом на устройствах с заданными свойствами [104].

Невозможность связи между ядрами GPU означает, что в принципе многоядерные системы с большим количеством дешёвых вычислительных

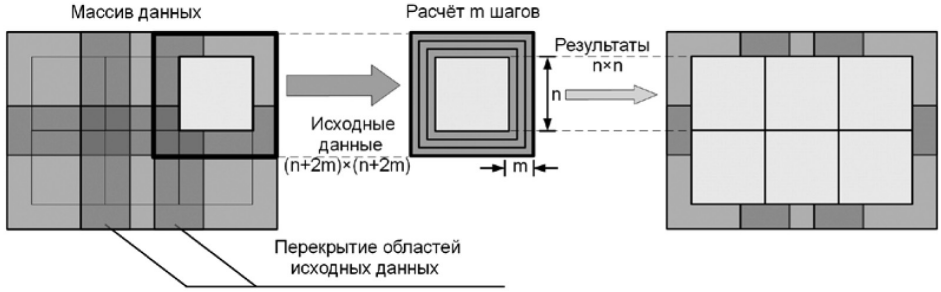


Рис. 6.32. Распараллеливание 2D разностной схемы на GPU

ядер и достаточной локальной кэш-памятью у каждого ядра, наподобие IBM Cell, выполняющие расчёты по схеме с обменом граничными данными (рис. 6.31), могут превзойти по производительности GPU. Однако для этого такая система должна иметь достаточно ресурсов для решения задачи, в частности, достаточный объём быстрой памяти. На сегодня подобные системы имеют на порядок более высокую стоимость и энергопотребление, чем GPU. Модельные расчёты показали ускорение расчётов двумерной разностной схемы с двойной точностью на GPU по сравнению с центральным процессором в 30 раз. Для трёхмерной задачи количество центральных процессоров, необходимых для решения задачи за приемлемое на практике время, становится крайне большим.

Расчёты с использованием процессоров общего назначения можно производить на мощных суперкомпьютерах на этапе математического моделирования. Суперкомпьютер на процессорах общего назначения, способный проводить несколько расчётов трёхмерных задач в день при эксплуатации томографического комплекса, будет крайне дорогим и громоздким. Поэтому основное внимание в книге уделяется использованию GPU-кластеров для решения задач томографии.

6.4.3. Организация вычислений обратной задачи ультразвуковой томографии на GPU кластерах

Обратные задачи ультразвуковой томографии в трехмерном пространстве являются очень сложными с вычислительной точки зрения. Для получения достаточно высокого разрешения необходимо решать задачу восстановления трехмёрной функции $c(x, y, z)$ на сетке размером порядка 400^3–500^3 точек. Таким образом, необходимо решать нелинейную коэффициентную обратную задачу с общим числом неизвестных порядка 10^8.

Вычислительная процедура решения обратной задачи ультразвуковой томографии имеет высокую степень параллелизма по данным, поскольку новые значения во всех точках сетки дискретизации, за исключением граничных, для нового временного слоя как в «прямой» (5.5)–(5.7), так и в «сопряженной» (5.9)–(5.11) задаче вычисляются по одинаковой схеме и не зависят друг от друга. Такие алгоритмы хорошо ложатся на SIMD-архитектуры (Single instruction, multiple data).

Трёхмерный объём данных можно обрабатывать последовательно по оси Z, это так называемый «z-marching» метод (рис. 6.33). Обращение к

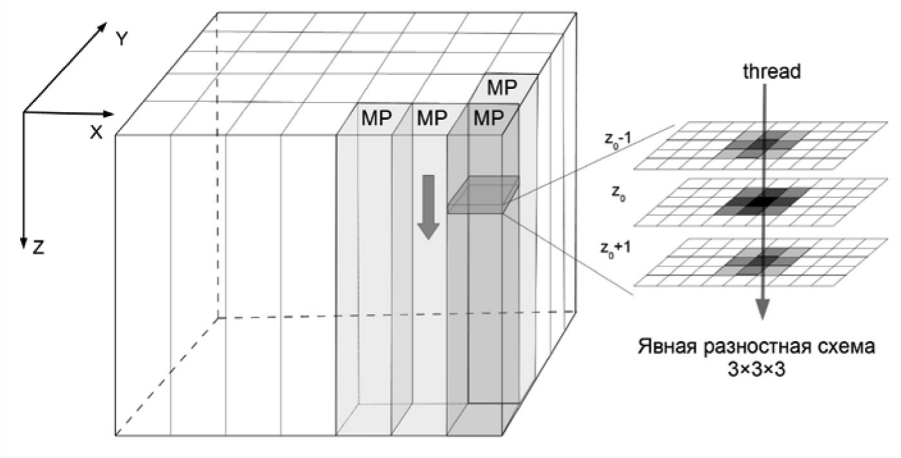


Рис. 6.33. Последовательная обработка данных по оси Z

данным происходит последовательно по двумерным сечениям, которые эффективно кэшируются современными графическими процессорами автоматически. При использовании типичных разностных схем с шаблоном 3 × 3 × 3 точек по X × Y × Z на каждом шаге по оси Z загружается следующее сечение для $z = z_0 + 1$ и выгружаются результаты для $z = z_0$. За счёт кэширования обращения к соседним элементам одного и того же сечения не требуют дополнительного времени. Каждый из параллельных потоков вычисляет результаты для точек (x, y, z) где x, y – фиксированы.

Для вычисления градиента по формуле (5.8) необходимы значения u и w в соответствующих точках (x, y, z, t). Задача для u решается последовательно по времени – из значений $u(t-2)$, $u(t-1)$ вычисляется $u(t)$. Задача для w решается также последовательно по времени, но в обратном направлении – $w(t)$ вычисляется из $w(t + 1)$, $w(t + 2)$, экспериментальных данных $U(t)$ и значений волнового поля $u|_S(t)$ на границе S, где расположены детекторы. Для того, чтобы начать вычисление $w(t)$ с последнего шага по времени $t = T$, необходимо вычислить сначала $u(t)$ для всех t в диапазоне $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Вычисления осуществляются в два этапа (рис. 6.34). На первом этапе решается задача (5.5)–(5.7) с начальными условиями для u, моделируется распространение ультразвуковой волны от источника. Полученные на границе S расчётной области значения $u|_S(t)$ запоминаются. Для гашения волн, отражённых от границы расчётной области,

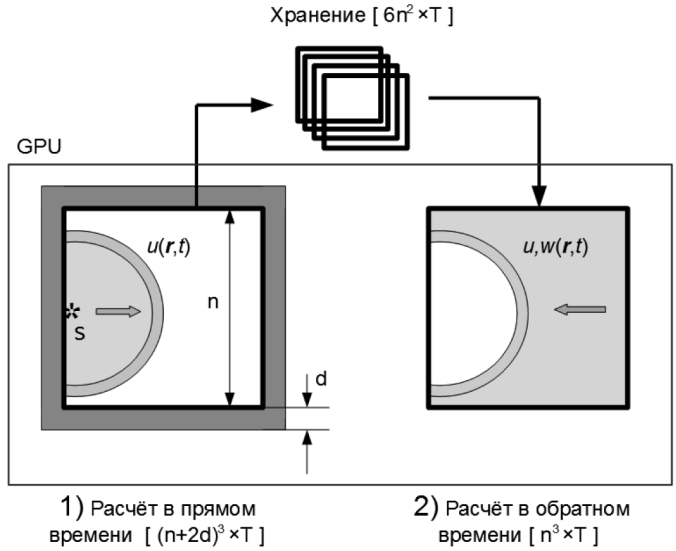


Рис 6.34. Схема расчётов в прямом и обратном времени

за границей S располагаются ещё несколько слоёв разностной сетки d с высоким поглощением. На втором этапе расчётов одновременно в обратном направлении по времени решаются задачи (5.5)–(5.7) для u и (5.9)–(5.11) для w при заданных граничных значениях $u|_S(t)$, сохранённых в памяти на первом этапе, и известных граничных условиях для w, получаемых из экспериментальных данных.

Объём граничных данных, получаемых на каждом шаге по времени, равен $6N^2$, что в десятки раз меньше обрабатываемого объёма N^3. Поэтому при проведении вычислений на GPU граничные данные могут без ущерба для производительности расчётов передаваться на первом этапе расчётов из GPU в системную память, а на втором этапе – обратно из системной памяти в GPU.

Для дальнейшего распараллеливания вычислений обрабатываемый объём данных N^3 может быть разделён между несколькими графическими процессорами. При этом каждым GPU так же, как и в однопроцессорном варианте, решается задача для u, w, с той лишь разницей, что данные на границе раздела массива данных должны быть переданы с другого GPU, а не из системной памяти, где хранятся данные для внешних границ расчётной области S. Передаваемый объём граничных данных остаётся

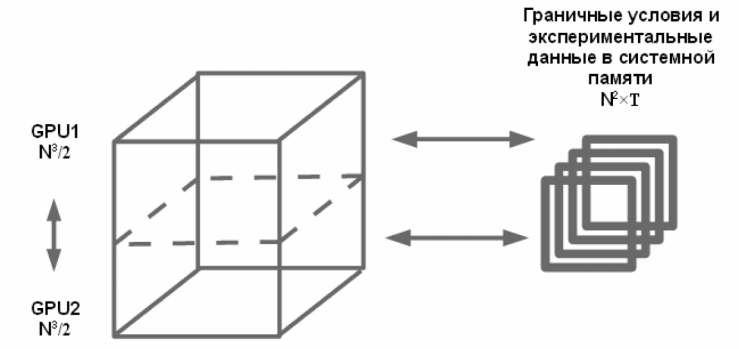


Рис. 6.35. Схема распараллеливания расчётов для одного источника на несколько GPU

в десятки раз меньшим, чем обрабатываемый на GPU объём данных, и практически не влияющим на производительность вычислений.

При использовании метода расчёта разностной схемы последовательно по оси Z (рис. 6.33) трёхмерный массив данных делится между GPU-устройствами также по оси Z (рис. 6.35). Тогда пересылку данных для границы раздела области можно осуществлять параллельно с расчётом внутренней части области.

По окончании второго этапа вычислений в памяти каждого GPU формируется градиент $\mathrm{grad}_n(\boldsymbol{r})$ для соответствующего источника n (и соответствующей части объёма, если используется разбиение объёма данных на несколько GPU). Эти данные должны быть просуммированы по всем источникам для получения градиента и разосланы на все GPU для обновления значений параметров модели $c(\boldsymbol{r})$, $a(\boldsymbol{r})$. Схема межпроцессорного обмена данными приведена на рис. 6.36. Вычисленные для каждого источника градиенты суммируются и результат рассылается на все вычислительные узлы, где из текущего итерационного приближения параметров c_i и исходных данных для каждого ультразвукового источника src_n вычисляется градиент для следующей итерации. Сбор и рассылка данных проводится один раз по завершении расчётов для одной итерации градиентного спуска. Передаваемый объём данных N^3 оказывается в тысячи (число шагов по времени) раз меньше объёма обработанных данных $N^3 \times T$, поэтому передача этих данных пренебрежимо мало влияет на производительность вычислений.

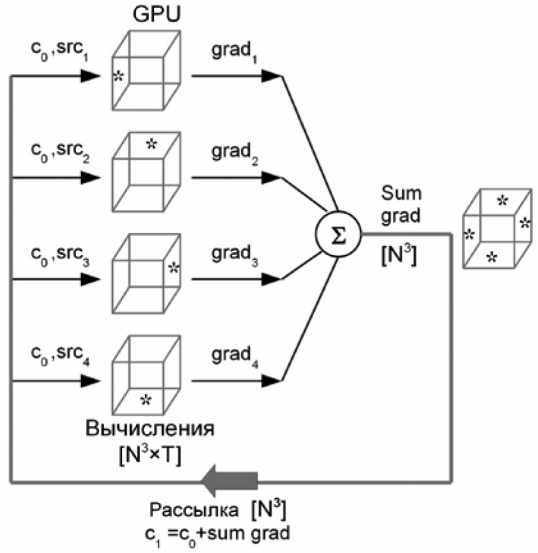


Рис. 6.36. Схема обмена данными между узлами на каждой итерации

Для проведения модельных расчётов для настоящей книги использовался суперкомпьютер Суперкомпьютерного центра Московского государственного университета [32]. Расчёты проводились на GPU NVIDIA Tesla X2070. Количество задействованных GPU-устройств соответствовало количеству источников ультразвука. Использование суперкомпьютера позволило решать обратную задачу восстановления трёхмерной функции скорости $v(x, y, z)$ за время порядка 2 часов.

6.5. Определение оптимальных параметров вычислительных комплексов в составе ультразвуковых томографов

Рассмотрим параметры вычислительного устройства, работающего в составе томографического комплекса. Такое устройство должно содержать:

– аппаратуру сбора и оцифровки данных;

– вычислительную часть с графическими и управляющими процессорами;

– коммуникационную сеть;

– дисковую систему хранения данных.

В аппаратуре сбора и оцифровки данных обычно используются микросхемы программируемой логики (FPGA), управляющие процессом сбора данных и получающие данные с аналого-цифровых преобразователей (АЦП). Общий объём экспериментальных данных составляет порядка 1 Гбайт, время их регистрации – порядка 200 мкс для каждого положения источника. Количество детекторов составляет порядка 10 тысяч. Выборки данных с каждого детектора имеют объём порядка 5–10 КБайт, хранятся в распределённой памяти устройства сбора данных и передаются на вычислительный комплекс.

Каждый вычислительный узел комплекса должен содержать, как минимум, достаточное количество GPU-устройств для решения задачи вычисления градиента функционала невязки для одного источника за приемлемое время. Вычислительный узел может содержать от одного GPU для задач небольшой размерности (до 360^3) до 2–4 устройств, работающих параллельно, если нужно решать задачу размерности порядка 500^3. Если расчёты для одного источника выполняются на нескольких графических процессорах, для обеспечения высокой скорости связи между собой эти GPU должны располагаться на одном вычислительного узле.

Внутренняя память каждого GPU должна быть достаточна для размещения всех данных для трёхмерной моделируемой области. Объём этих данных составляет 2–2.5 ГБайт. Заметим, что объём данных растёт как размерность задачи в кубе, а время расчёта на одном GPU – как размерность задачи в четвёртой степени. Поэтому если время расчёта ограничивается путём распараллеливания задачи большей размерности на большее число GPU, то объём данных, которые нужно хранить во внутренней памяти каждого GPU, также оказывается ограничен. Поэтому для данной задачи нет смысла в наличии оперативной памяти более 3 ГБайт на каждом GPU. Такой объём памяти позволяет решать задачу размерностью до 400^3 на каждом GPU, время расчёта при таком объёме данных на каждый GPU составит 6–8 часов.

Каждый вычислительный узел должен содержать достаточно системной оперативной памяти для хранения граничных условий и экспериментальных данных. Объём этих данных составляет $6N^2 \times T \approx 5$ ГБайт для задачи размерностью $X \times Y \times Z \times T = 400 \times 400 \times 400 \times 2000$. Отсюда необходимо не менее ($6 \times$ Tasks_per_node) ГБайт оперативной памяти на каждый вычислительный узел, где Tasks_per_node – количество задач

вычисления градиента для одного ультразвукового источника, выполняющихся параллельно на одном узле.

Центральные процессоры выполняют функцию рассылки данных на GPU и между вычислительными узлами. К ним предъявляются минимальные требования – они лишь должны обслуживать имеющиеся на вычислительном узле каналы связи.

Коммуникационная сеть используется для объединения данных со всех узлов для вычисления градиента и для рассылки следующего итерационного приближения на все узлы (рис. 6.36). Эти действия осуществляются лишь после завершения расчётов каждой итерации градиентного спуска – один раз в несколько минут. Объём передаваемых данных составляет порядка 0.5 ГБайт.

Поскольку используются только операции объединения данных со всех узлов и рассылки данных на все узлы, оптимальной топологией коммуникационной сети является звезда или дерево (рис. 6.37).

Топология сети типа дерева позволяет собирать и рассылать данные с большого количества узлов с минимальной задержкой. Число узлов такой сети растёт в зависимости от её длины в геометрической прогрессии. Зная задержку распространения сообщений L, длину сети s, её пропускную способность B и объём данных A, можно определить оптимальный размер X одного блока данных, обеспечивающий передачу этого массива данных за минимальное общее время T из соотношения: $T = (A/B + L)(s + A/X)$.

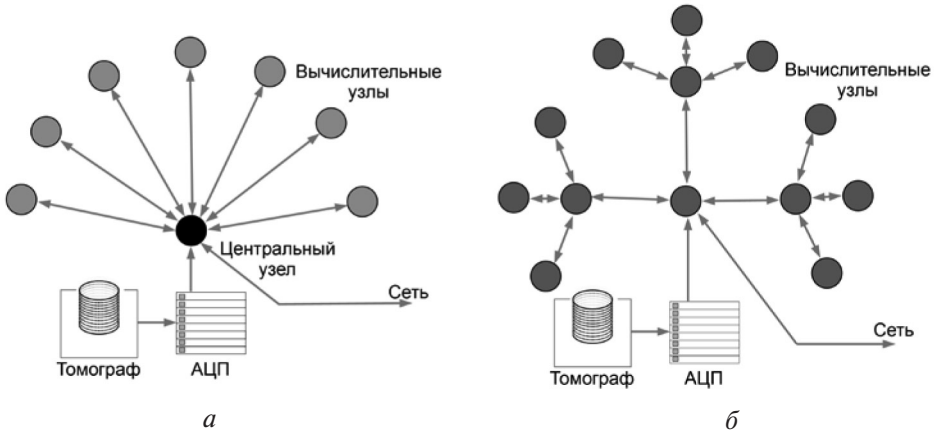


Рис. 6.37. Топология коммуникационной сети: *а* – звезда, *б* – дерево

Рассматриваемая задача содержит относительно мало межузловых коммуникаций и может выполняться практически на любой топологии сети, имеющей достаточную пропускную способность.

К дисковой подсистеме предъявляются также минимальные требования – она должна обеспечивать хранение данных в размере порядка 20 ГБайт на каждую задачу.

Для решения задач оптимизации конфигурации вычислительного комплекса эта конфигурация может быть выражена в виде системы неравенств, например:

Total_time = N^4 / (GPU_per_task * GPU_bandwidth) + N^3/comm_bandwidth + total_comm_latency

– общее время выполнения расчётов

total_comm_latency = net_latency*(net_length*comm_block_size/comm_bandwidth + N^3/comm_block_size)

– общая задержка передач по сети

GPU_per_node = Tasks_per_node * GPU_per_task

– число графических процессоров на одном узле

Num_GPU = Num_Sources * GPU_per_task

– общее число графических процессоров

Num_GPU = Num_nodes * GPU_per_node

RAM_per_node> = Tasks_per_node * 6 Gb

– количество оперативной памяти на каждом узле

comm_channels = GPU_per_node + Comm_per_node

– общее число каналов связи, которые обслуживают центральные процессоры

net_length < = log(Num_nodes)/log(Comm_per_node-1) + 1

– длина сети при использовании топологии типа дерева

CPU_per_node = comm_channels/4

– число центральных процессоров на каждый узел

и т. д.

Дополнив эту систему требованиями, например на стоимость комплекса, энергопотребление и т. п., и характеристиками оборудования, можно получить оптимальное решение.

В настоящее время всё большее распространение приобретают относительно мощные многопользовательские графические суперкомпьютерные комплексы [105]. Такой комплекс используется как для реконструкции

томографических изображений, так и для проведения исследований с использованием полученных данных, например их классификации и т. д. [106]. Суперкомпьютерный комплекс может включать структуру, используемую для реконструкции изображений, как подмножество.

6.6. Задачи математического практикума к главе 6

Задача №1. Моделирование распространения ультразвуковых волн в неоднородной среде с использованием GPU

Выполните следующие операции:

1. Проведите расчёты задачи № 1 главы 3, используя GPU. На каждом шаге по времени используйте 250000 потоков – по одному потоку на каждую точку сетки по X. Y. Применительно к GPU NVidia запустите по 512 параллельных потоков в каждом блоке.

2. Сравните время выполнения расчётов на 4 вычислительных ядрах CPU и на GPU.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Книга посвящена разработке эффективных методов решения обратных задач вычислительной диагностики на основе использования суперкомпьютерных технологий. В качестве базисных рассмотрены три задачи. Две из них связаны с компьютерной томографией.

Первые рентгеновские медицинские томографы появились в 70–80-х годах прошлого столетия. Рентгеновские томографы и в настоящее время являются одним из основных инструментов исследования в медицине. Разрешение современных медицинских томографов составляет 1–2 мм. В промышленной диагностике разрешение рентгеновских томографов может составлять десятки микрон. С математической точки зрения обратные задачи рентгеновской томографии являются линейными и двумерными. Решение таких задач не требует использования суперЭВМ. Тем не менее в современных рентгеновских медицинских томографах собирают и обрабатывают данные одновременно на сотне слоёв. В связи с этим вполне разумным является использование вычислительных комплексов на основе графические процессоров. Такие комплексы позволяют достичь ускорения с коэффициентом порядка 100.

Рентгеновские томографы в медицине имеют только один недостаток – дозу ионизирующего излучения, которую неминуемо получает пациент. В настоящее время как в России, так и за рубежом разрабатываются принципиально новые томографические комплексы – 3D ультразвуковые томографы. Важнейшей задачей, на которую нацелены эти разработки, является дифференциальная диагностика рака молочной железы. В отличие от рентгеновской томографии, из-за волнового характера используемого ультразвукового излучения обратные задачи ультразвуковой томографии необходимо решать как трёхмерные задачи, в которых реконструируется трёхмерная неизвестная функция, представляющая собой скорость распространения ультразвуковой волны как функцию от трёх координат.

Обратные задачи ультразвуковой томографии являются нелинейными, и их решение невозможно без использования суперкомпьютера. Прорывные результаты в области решения обратных задач ультразвуковой томографии получены в последние несколько лет в работах, в которых обратная задача трактуется как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения [32–37]. В этих работах предложены алгоритмы решения 3D коэффициентных обратных задач волновой томографии в

моделях, учитывающих дифракционные эффекты и поглощение. Высокая эффективность предложенных алгоритмов продемонстрирована в главах 3–4 с использованием суперкомпьютеров общего назначения.

Однако суперкомпьютеры общего назначения из-за их физических параметров нельзя использовать в составе томографических комплексов. В главах 5–6 показано, что с тем же успехом обратные задачи ультразвуковой томографии можно решать и на GPU-кластерах, которые по своим физическим параметрам вполне могут входить в состав томографических комплексов. Обсуждаются проблемы оптимизации архитектуры GPU-кластеров и программного обеспечения для обработки данных ультразвуковых томографов.

В последнее время возрос интерес к решению обратных задач волновой диагностики, в которой в качестве источников излучения используются электромагнитное излучение, акустические волны, ультразвук, сейсмические волны [107–114]. Основной задачей вычислительной диагностики является восстановление внутренней структуры объектов с высоким разрешением. Томографические подходы, в которых используется много разных источников или один источник, перемещающийся по заданной траектории либо в пределах выделенной области, позволяют существенно повысить разрешающую способность диагностических комплексов.

Пример такой задачи приведён в главе 2 книги. РЛС с синтезированной апертурой эффективно используются как для исследования поверхности Земли из космоса, так и для подводных исследований [41–51]. В главе 2 книги приведён пример обработки реальных данных РЛС с синтезированной апертурой, полученных с борта космического аппарата «Алмаз». На пути компьютерного синтезирования апертуры разрешающая способность диагностического комплекса увеличивается почти в тысячу раз. С математической точки зрения интерпретация данных РЛС с синтезированной апертурой не представляет особых проблем, поскольку проводится в рамках линейных моделей. К сожалению, возможность использования этого подхода для диагностики внутренней структуры объектов является ограниченной. Как показано в главах 2–6 книги, обратные задачи волновой томографии являются нелинейными, а модели, используемые в системах синтезирования апертуры, относятся к линейным.

Разработанные методы и алгоритмы решения обратных задач волновой томографии могут найти применение в медицине, неразрушающем контроле промышленных изделий, инженерной сейсмике, сейсморазведке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рентген В. К. О новом роде лучей. Перевод с немецкого под редакцией и с примечаниями А. Ф. Иоффе. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1933. – Классики естествознания.

2. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР, 1943

3. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. // ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 501–504.

4. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР, 1963, т. 151, № 1, с. 49–52.

5. Тихонов А. Н. Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1979.

6. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // ДАН СССР, 1962, т. 145, № 2, с. 270–272.

7. Иванов В. К. О приближённом решении операторных уравнений первого рода // ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 4, с. 1089–1094.

8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука, 1978.

9. Морозов В. А. О решении функциональных уравнений методом регуляризации // ДАН СССР, 1966, т. 167, № 3, с. 510–512.

10. Bakushinsky A, Goncharsky A. Ill posed problems: theory and applications. Dordrecht: Kluwer acad. publ., 1994.

11. Тихонов А. Н,. Гончарский А. В. Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М: Наука, 1983.

12. Винокуров В. А. О понятии регуляризируемости разрывных отображений // ЖВМ и МФ, 1973, т. 11, № 5, с. 1097–1112.

13. Goncharsky A. V. Ill–posed problems and their solution methods. // Ill–posed problems in the Natural Sciences. Moscow, Mir Publishers, 1987, pp. 21–52.

14. Kak A, Slaney M. Principles of computerized tomographic imaging. SIAM, 2001.

15. Beilina L and Klibanov M V 2012 Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems (New York: Springer).

16. Duric N et al. 2005 Development of ultrasound tomography for breast imaging: Technical assessment Medical Physics 32 1375–86.

17. Duric N, Littrup P, Poulo L, Babkin A, Pevzner R, Holsapple E, Rama 0 and Glide C Detection of breast cancer with ultrasound tomography: First results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) prototype Medical Physics 34 (2007) 773–85.

18. Schmidt S, Duric N, Li C, Roy O and Huang Z. F. Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // Medical Physics 38 (2011) 998–1007.

19. Wiskin J, Borup D T, Johnson S A, Berggren M, Abbott T and Hanover R 2007 Full wave non–linear inverse scattering Acoustical Imaging vol 28 ed M Andre (Dordrecht: Springer) pp 183–93.

20. J. Wiskin, D. T. Borup, S. A. Johnson, M. Berggren, Non–linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography, J. Acoust. Soc. Am. 131 (2012) 3802–3813.

21. M. André, J. Wiskin, D. Borup, S. Johnson, H. Ojeda–Fournier, L. Olson, Quantitative volumetric breast imaging with 3D inverse scatter computed tomography, Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc. 2012 1110–1113.

22. Natterer F and Wubbeling F 1995 A propagation–backpropagation method for uzltrasound tomography Inverse Problems 11 1225–32.

23. Natterer F 2010 Incomplete data problems in wave equation imaging Inverse Problems and Imaging 4 685–91.

24. Natterer F 2010 Ultrasound mammography with a mirror Phys. Med. Biol. 55 N275.

25. F. Natterer, Reflectors in wave equation imaging, Wave Motion 45 (2008) 776–784.

26. Jiřík R, Peterlík I, Ruiter N, Fousek J, Dapp R, Zapf M and Jan J 2012 Sound–speed image reconstruction in sparse–aperture 3–D ultrasound transmission tomography IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 59 254–64.

27. Gemmeke H, Menshikov A, Tchernikovski D, Berger L, Göbel G, Birk M, Zapf M and Ruiter N V 2010 Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC) IEEE pp 2449–54.

28. Stotzka R, Ruiter N V, Mueller T O, Liu R and Gemmeke H 2005 High resolution image reconstruction in ultrasound computer tomography using deconvolution Proc. SPIE 5750 315–25.

29. Burov V. A., Zotov D. I., Rumyantseva O. D. Reconstruction of spatial distributions of sound velocity and absorption in soft biological tissues using model ultrasonic tomographic data // Acoustical Physics, 2014, V 60, № 4, с. 479–491.

30. Burov V. A., Zotov D. I., Karavay M. F., Rumyantseva O. D. Ultrasound tomography of soft biological tissues containing strong inhomogeneities // Physics of Wave Phenomena, 2013, том 21, № 1, с. 74–80.

31. AV Goncharsky and SY Romanov. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013, V. 29, № 7, 075004. doi:10. 1088/0266–5611/29/7/075004.

32. Goncharsky Alexander V. and Romanov Sergey Y. Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation. 2014, Phys. Med. Biol. V. 59, №8, 1979–2004. doi:10. 1088/0031–9155/59/8/1979.

33. AV Goncharsky, SY Romanov, S. Y. Seryozhnikov. Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data// Wave Motion, 2014, Volume 51, Issue 3, pp. 389–404. DOI: 10. 1016/j. wavemoti. 2013.10. 001.

34. Goncharskii A. V., Romanov S. Yu. On a Three–Dimensional Diagnostics Problem in the Wave Approximation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. V. 40. № 9. P. 1308–1311.

35. Goncharskii A. V., Romanov S. Yu. Two Approaches to the Solution of Coefficient Inverse Problems for Wave Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012, Vol. 52, No. 2, pp. 245–251.

36. A. V. Goncharskii, S. L. Ovchinnikov, and S. Yu. Romanov. On the One Problem of Wave Diagnostic. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. Vol. 34, No. 1, 2010, pp. 1–7.

37. Гончарский А. В., Романов С. Ю. Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2006. Т. 7. №1. С. 36–40.

38. Гончарский А. В., Романов С. Ю. Об одной задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2011. Т. 12. №1. С. 317–320.

39. Гончарский А. В., Романов С. Ю. Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач в УЗИ–томографии// Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. №1. С. 235–238.

40. Гончарский А. В., Романов С. Ю., Серёжников С. Ю. Задачи волновой томографии с неполным диапазоном данных // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. Т. 15, №2. с. 274–285.

41. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Матвиенко А. Н., Романов С. Ю., Щетинин В. Г., Чубаров И. Н., Макарычев С. И., Гришко М. И., Ксенофонтов Е. А. Задача цифровой реконструкции изображений РЛС с синтезированной апертурой // ДАН СССР, 1992, т. 322, № 5, с. 884–886.

42. Антонов А. С. Технологии программирования MPI и OpenMP. М. : Издательство Московского Университета, 2012.

43. Лаврентьев М. М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 1. С. 32–35.

44. Ramm A. G. Multidimensional Inverse Scattering Problems. London: Longman Group, 1992.

45. Ягола А. Г., Янфей В., Степанова И. Э., Титаренко В. Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М. : Бином, 2014.

46. Barber B. C. Theory of digital imaging from orbital synthetic aperture radar // IJRS, 11, 1983.

47. Oliver C. J. Review article. Synthetic – aperture radar imaging // J. Phys. D: Appl. Phys., 22, 1989. – 871 – 890.

48. Элаши Ш., Бикнэлл Т. Радиолокационные станции с синтезированием апертуры для космической съемки поверхности планеты: области применения, методы конструкторские разработки // ТИИЭР, 70, № 10, 1982. – 44–89.

49. Антипов В. Н., Горяйнов В. Т., Кулин А. Н. Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны / Москва : Радио и связь, 1988.

50. Hemmsen, M. C. и др., 2012. In vivo evaluation of synthetic aperture sequential beamforming. Ultrasound in Med. & Biol., 38(4), p. 708–716.

51. Золотарев, В. В., 2007. Гидролокаторы с синтезированной апертурой для автономного подводного робота. Подводные исследования и робототехника, 1(3), p. 12–20.

52. Гончарский А. В., Романов С. Ю., Харченко С. А. Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2006. Т. 7. № 1. С. 113–121.

53. Овчинников С. Л., Романов С. Ю. Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2008. Т. 9. № 2. С. 338–345.

54. A. Backushinsky, A. Goncharsky, S. Romanov, S. Seatzu, – On the identification of velocity in seismics and in acoustic sounding, –Pubblicazioni dell'istituto di analisa globale e applicazioni, Serie "Problemi non ben posti ed inversi», N 71, Firenze, November 1994.

55. Горюнов А. А., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. Изд–во МГУ, 1989.

56. Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications/ Ed. by G. T. Herman. Berlin and New York: Springer–Verlag, 1979. –252 p.

57. Yilmaz Ö 2001 Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data (Society of Exploration Geophysicists, Investigations in Geophysics vol 10).

58. Овчинников С. Л., Романов С. Ю. Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2008. Т. 9. №1. С. 338–345.

59. А. В. Гончарский, С. Л. Овчинников, С. Ю. Романов. Обратные задачи волновой диагностики дорожного полотна // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2009. Т. 10. №1. С. 275–280.

60. Бадалян, В. Г. и др., 2008. Ультразвуковая дефектометрия металлов с применением голографических методов. М: Машиностроение.

61. Г. М. Агаян, Н. С. Виноградов, А. В. Гончарский, С. Л. Овчинников, С. Ю. Романов. Диагностика трехмерных сред методами синтезированной апертуры // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2007. Т. 8. №1. С. 154–159.

62. Chavent G. Deux resultats sur le probleme inverse dans les equations aux derivees partielles du deuxieme ordre an t et sur l'unicite de la solution du probleme inverse de la diffusion // Paris. C. R. Acad. Sc. 1970. Vol. 270. P. 25–28.

63. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // УМН. – 1941, №8. стр. 125–160.

64. Engquist B and Majda A 1977 Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves Math. Comput. 31 629.

65. Bakushinsky A B, Kokurin M Yu, Smirnova A B 2011 Iterative Methods for Ill–Posed Problems. An Introduction. Ill–Posed Problems Series 54 (Berlin/New York: De Gruyter).

66. Weiwad W, Heinig A, Goetz L, Hartmann H, Lampe D, Buchmann J, Millner R, Spielmann R and Heywang–Koebrunner S H 2000 Direct measurement of sound velocity in various specimens of breast tissue Invest. Radiol. 35 21.

67. Foster I. Designing and building parallel programs: concepts and tools for parallel software engineering. Reading: Addison Wesley, 1995.

68. Описание средства профилировки mpiP (http://mpip. sourceforge. net/).

69. Vetter J. S., McCracken M. O. Statistical Scalability Analysis of Communication Operations in Distributed Applications // Proc. of the 8th ACM SIGPLAN Symp. on Principles and Practice of Parallel Programming (PPOPP–2001). New York: ACM, 2001.123–132.

70. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М. : Изд–во Моск. ун–та, 2004.

71. Воеводин Вад. В., Овчинников С. Л., Романов С. Ю. Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. №1. С. 307–315.

72. Романов С. Ю. К вопросу о масштабируемости программы для обратной задачи волновой томографии // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского 2013.

73. Hendee W R and Ritenour E R 2002 Medical imaging physics (New York: John Wiley & Sons).

74. L. Pestov On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // Journal of Inverse and Ill–posed Problems Volume 22, Issue 2 (Apr 2014) Pages 245–250.

75. Rene G. H. Willemink, Srirang Manohar, Jithin Jose, Kees Slump, Ferdi van der Heijden Simultaneous imaging of ultrasound attenuation, speed of sound and optical absorption in a photoacoustic setup and Ton G. van Leeuwen Proc. of SPIE Vol. 7265 72650J–10.

76. Natterer F 2008 Acoustic mammography in the time domain Inst. Appl. Math. Preprint http://www. math. uni–muenster. de/num/Preprints/files/80. pdf.

77. Pratt R G, Huang L, Duric N and Littrup P 2007 Sound–speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data Proc. SPIE 6510 65104S.

78. Royer D and Dieulesaint E 1996 Elastic Waves in Solids I (Berlin Heidelberg New York: Springer).

79. Shutilov V A 1988 Fundamental Physics of Ultrasound (New York London Paris: Gordon and Breach Science Publishers).

80. Tikhonov A N and Samarskii A A 1990 Equations of Mathematical Physics (New York: Dover pubns).

81. Holm S and Sinkus R 2010 A unifying fractional wave equation for compressional and shear waves J. Acoust. Soc. Am. 127 542–8.

82. V. V. Varadan, Y. Ma, V. K. Varadan, A. Lakhtakia, Scattering of waves by spheres and cylinders, in: Field Representations and Introduction to Scattering, Amsterdam, 1991.

83. Г. М. Агаян, Вад. В. Воеводин, С. Ю. Романов. О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2013. Т. 14. № 4. С. 533–542.

84. Г. М. Агаян, С. Ю. Романов. Суперкомпьютерное моделирование в задаче ультразвуковой диагностики с применением аналитических подходов. // Вестник УГАТУ, 2013, Том 17, № 5(58), с. 260–269. http://journal. ugatu. ac. ru/index. php/vestnik/article/view/747/741.

85. T. S. Angell, R. E. Kleinman, F. Hettlich, The resistive and conductive problems for the exterior Helmholtz equaion, SIAM J. Appl. Math 50 (1990) 1607–1622.

86. Korneev V. A., Johnson L. R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results //Geophys. J. Int. 1993. N 115.230–250.

87. Randall C. O'Reilly, Jeffrey M. Beck. A Family of Large–Stencil Discrete Laplacian Approximations in Three Dimensions // Int. J. Numer. Meth. Engng 2006; 00:1–16.

88. Dinghui Yang, Ming Lu, Rushan Wu, and Jiming Peng. An Optimal Nearly Analytic Discrete Method for 2D Acoustic and Elastic Wave Equations // Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 94, No. 5, pp. 1982–1991, 2004.

89. Alpert B., Greengard L., Hagstrom T. Nonreflecting Boundary Conditions for the Time–Dependent Wave Equation // Journal of Computational Physics 180, 270–296 (2002).

90. М. А. Ильгамов, А. Н. Гильманов. Неотражающие условия на границах расчетной области. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240с.

91. Алексеев А. С., Глинский Б. М., Собисевич А. Л. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН; Гео, Филиал изд–ва СО РАН, 2004.387с.

92. J. Wiskin, D. Borup, S. Johnson, M. Berggren, D. Robinson, J. Smith, J. Chen, Y. Parisky, J. Klock. Inverse scattering and refraction corrected reflection for breast cancer imaging // Proc. of SPIE Vol. 7629 76290K–1.

93. Antonio Arnau Vives, Antonio Arnau. Piezoelectric Transducers and Applications. Springer, 2008.

94. Thomas Heckel, Gerhard Brekow, Heinz Mrasek. Ultrasonic Testing With Matrix Arrays, Applications in Non–Destructive Testing // ECNDT 2006 – Th. 2.6.4.

95. Jonathan M. Blackledge. Digital Signal Processing: Mathematical and Computational Methods, Software Development and Applications. Horwood Publishing. 2003.

96. Laugier, Pascal, Haïat, Guillaume (Eds.). Bone Quantitative Ultrasound. Springer, 2011.

97. Воеводин В. В., Воеводин Вл В. Параллельные вычисления. СПб: БХВ–Петербург, 2002.

98. Адинец А. В., Воеводин Вл. В. Графический вызов суперкомпьютерам // Открытые системы 2008, № 4.

99. Yuen, D. A., Wang, L., Chi, X., Johnsson, L., Ge, W., Shi, Y. (Eds.) GPU Solutions to Multi–scale Problems in Science and Engineering. Springer, 2013.

100. Intel Instruction Set Architecture Extensions. URL: https://software. intel. com/en–us/intel–isa–extensions.

101. Khronos group. URL: https://www. khronos. org/.

102. OpenACC directives for accelerators. URL: http://www. openacc–standard. org/.

103. Параллельные вычисления CUDA. URL: http://www. nvidia. ru/object/cuda–parallel–computing–ru. html.

104. А. В. Климов, Н. Н. Левченко, А. С. Окунев, А. Л. Стемпковский. Автоматическое распараллеливание для гибридной системы с потоковым ускорителем // Высокопроизводительные вычислительные системы. информационные технологии и вычислительные системы 2/2011 3.

105. NVidia Grid: виртуализированное графическое ускорение. URL: http://www. nvidia. ru/object/nvidia–grid–ru. html.

106. Germain C1, Breton V, Clarysse P, Gaudeau Y, Glatard T, Jeannot E, Legré Y, Loomis C, Magnin I, Montagnat J, Moureaux JM, Osorio A, Pennec X, Texier R. Grid–enabling medical image analysis // J Clin Monit Comput. 2005 Oct;19(4–5):339–49.

107. L. Beilina, M. V. Klibanov Approximate Global Convergence in Imaging of Land Mines from Backscattered Data // Applied Inverse Problems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 48, 2013, pp 15–36.

108. Глинский Б. М., Собисевич А. Л., Хайретдинов М. С. Опыт вибросейсмического зондирования сложно построенных геологических структур (на примере грязевого вулкана Шуго) // Докл. РАН., 413, № 3, 2007. – 1–5.

109. В. В. Пикалов, А. Л. Баландин, Д. Г. Родионов, М. Г. Власенко, Б. А. Князев «Терагерцовая томография низкоконтрастных объектов: алгоритмы и экспериментальные измерения» // Вестник Новосибирского гос. университета. Серия: Физика. 2010. 5, № 4.91–99.

110. Гайкович П. К., Хилько А. И., Гайкович К. П. Метод многочастотной ближнепольной акустической томографии объёмных неоднородностей морского дна // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, 54, № 6, 2011. – 431–443.

111. Базулин Е. Г. О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. журн., 59, № 2, 2013. – 235–254.

112. Байков С. В., Молотилов А. М., Свет В. Д. Физико–технические аспекты получения ультразвуковых изображений структур головного мозга через толстые кости черепа. 1. Теоретические и модельные исследования // Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 3. С. 332–341.

113. Байков С. В., Бабин Л. В., Молотилов А. М., Нейман С. И., Риман В. В., Свет В. Д., Селянин А. И. Физико–технические аспекты получения ультразвуковых изображений структур мозга через толстые кости черепа. 2. Экспериментальные исследования // Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 4. С. 465–473.

114. C. Thurber, J. Ritsema, Gerald Schubert Theory and Observations – Seismic Tomography and Inverse Methods // In Treatise on Geophysics (2007), pp. 323–360.

Научное издание

Гончарский Александр Владимирович
Романов Сергей Юрьевич
Серёжников Сергей Юрьевич

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Компьютерная верстка *С. В. Горячевой*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 — научная и производственная литература

Подписано в печать 25.05.2016. Формат 70×100/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 28,75. Тираж 500. Заказ 13671b.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного Издательством Политехнического университета,
в Типографии Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.